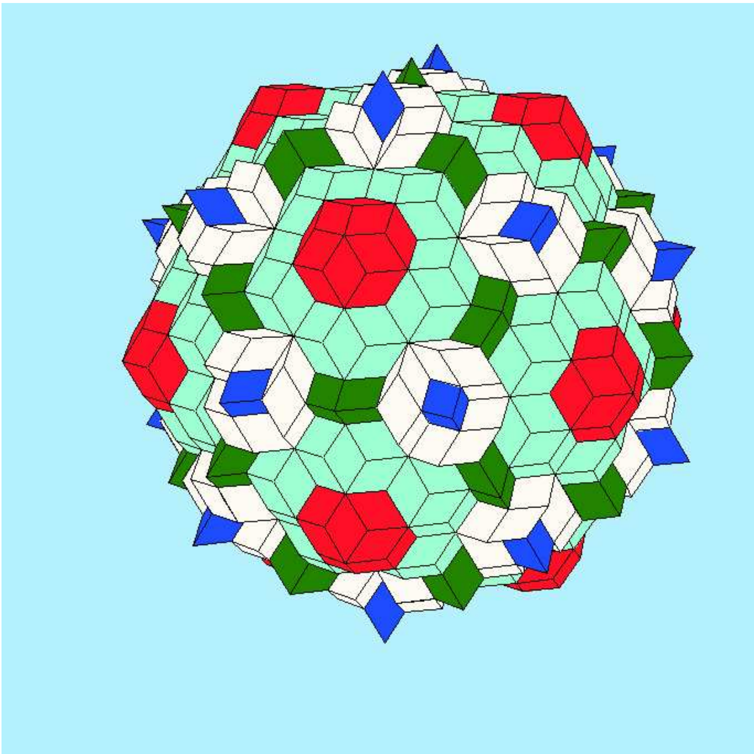
ROMBSKI POLIEDRI

MATEMATIČNA DELAVNICA

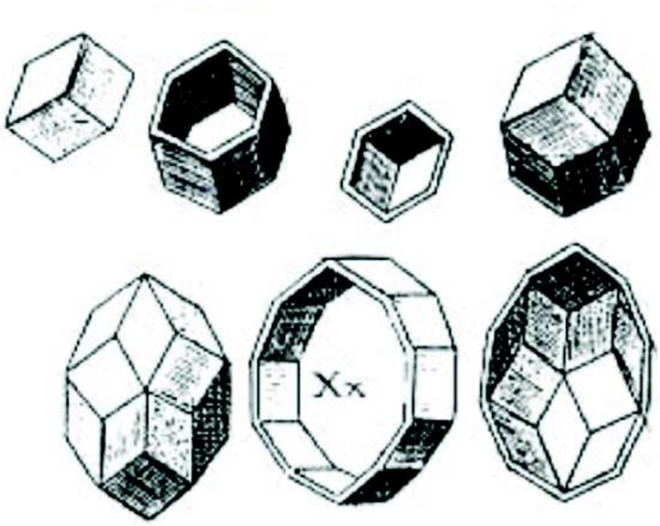
Izidor Hafner

Darjo Felda



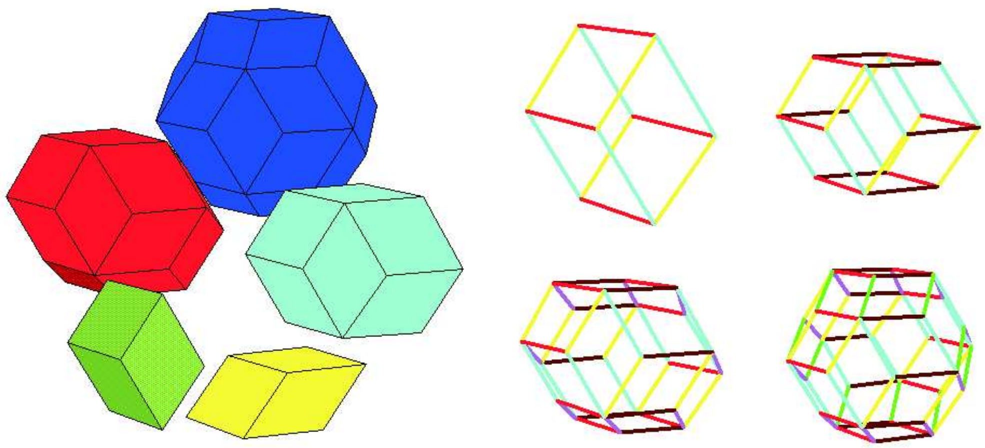
1. Uvod

Po navedbi iz [2] je Kepler delil telesa s skladnimi mejnimi ploskvami na pravilna (platonska) in polpravilna (rombska) telesa. Poznal je dve telesi iz druge skupine. Prvo je omejeno z 12 rombi, pri katerih je razmerje med dolžinama diagonal enako $\sqrt{2}$. Drugo telo je omejeno s 30 rombi, razmerje med dolžinama diagonal pa je *zlati rez*. Telesi sta *rombski dvanajsterec* (dodekaeder) in *rombski trideseterec* (triakontaeder, v nadaljevanju ga bomo kratko poimenovali trideseterec). V delu *De Nive Sexangula* je Kepler opisal način, kako je prišel do teh teles.



Slika je iz dela *Harmonices mundi* iz leta 1619. Zgoraj je prikazana izdelava modela rombskega dvanajsterca, spodaj pa izdelava trideseterca iz treh delov. Vsak izmed teh delov ima deset mejnih ploskev. Če zlepimo levi in desni del, dobimo *rombski dvajseterec*. Tega je odkril ruski matematik Fedorov šele leta 1885. Vmesni del je imenoval *zona* (ta pojem je tudi posplošil in uvedel t. i. *zonoedre*).

Mi se bomo omejili na rombske poliedre, pri katerih je razmerje med dolžinama diagonal zlati rez. Obstaja samo pet različnih konveksnih teles te vrste. Poleg dveh že omenjenih sta še rombska šesterca (paralelepipeda), in sicer *koničasti* in *ploščati romboeder*, ki sta bila verjetno znana že pred Keplerjem. Preostalo telo je šele leta 1960 odkril hrvaški matematik Stanko Bilinski, ko je dokončno obdelal vse možnosti za rombska telesa. Pri tem gre za rombski dvanajsterec, ki je metrično drugačen od Keplerjevega, kombinatorično pa je njemu enak. Bilinski je to telo poimenoval *rombski dvanajsterec druge vrste*.



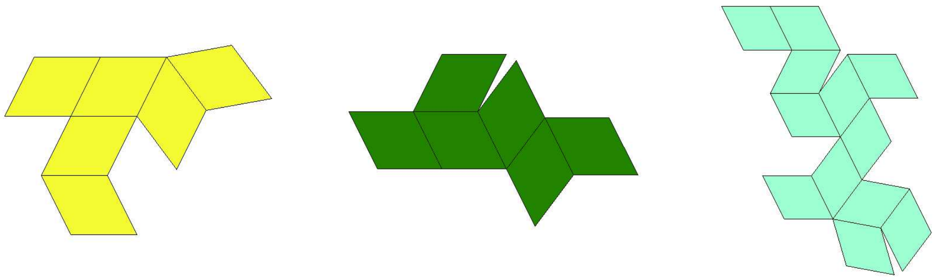
Bilinski je pokazal, da dobimo dvanajsterec iz dvajseterca tako, da izničimo en pas rombov (*zono* rombov), ki obkroža dvajseterec. Če naredimo podobno z dvanajstercem, dobimo romboeder.

Naslednja tabela prikazuje diederske in prostorske kote, če je polni kot celota (1).

Telo	Diedrski koti	Prostorski koti
Koničasti romboeder	$\frac{1}{5}, \frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}, \frac{3}{20}$
Ploščati romboeder	$\frac{1}{10}, \frac{2}{5}$	$\frac{1}{20}, \frac{7}{20}$
Rombski dvanajsterec	$\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}, \frac{3}{20}, \frac{1}{5}, \frac{7}{20}$
Rombski dvajseterec	$\frac{3}{10}, \frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{7}{20}$
Rombski trideseterec	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}, \frac{7}{20}$

2. Matematična delavnica

Cilj delavnice je, da izdelamo modele teh rombskih poliedrov in da raziskujemo druga (nekonveksna) telesa, ki jih lahko dobimo z lepljenjem osnovnih delov. Izkaže se, da lahko vsa telesa izdelamo le z uporabo romboedrov. Za večje modele potrebujemo veliko število romboedrov, zato je dobro, da imamo na razpolago tudi dodekaedre. Vsak učenec naj bi izdelal 10 romboedrov vsake vrste. Na naslednjih slikah so mreže teh teles.



Naloge:

Vzemi po dva romboedra vsake vrste in izdelaj rombski dodekaeder.

Vzemi dodekaeder in po tri romboedre vsake vrste ter izdelaj dvajseterec.

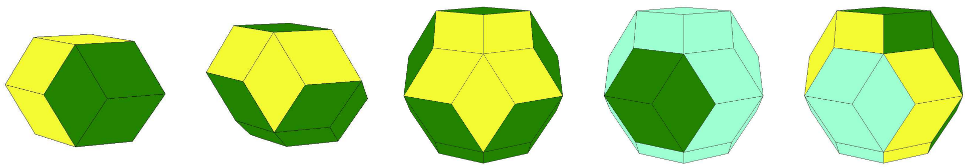
Vzemi dvajseterec in po pet romboedrov vsake vrste ter izdelaj trideseterec. Koliko romboedrov potrebuješ za izdelavo trideseterca?

Iz treh dvanajstercev izdelaj trideseterec.

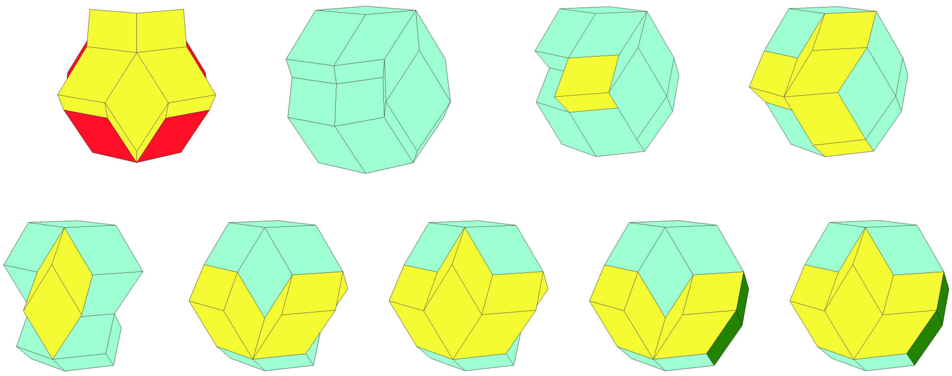
Vzemi dva dvanajsterca, naredi črko T in telo dopolni do trideseterca.

(Mreže dobite na naslovu [11].)

Rešitve:



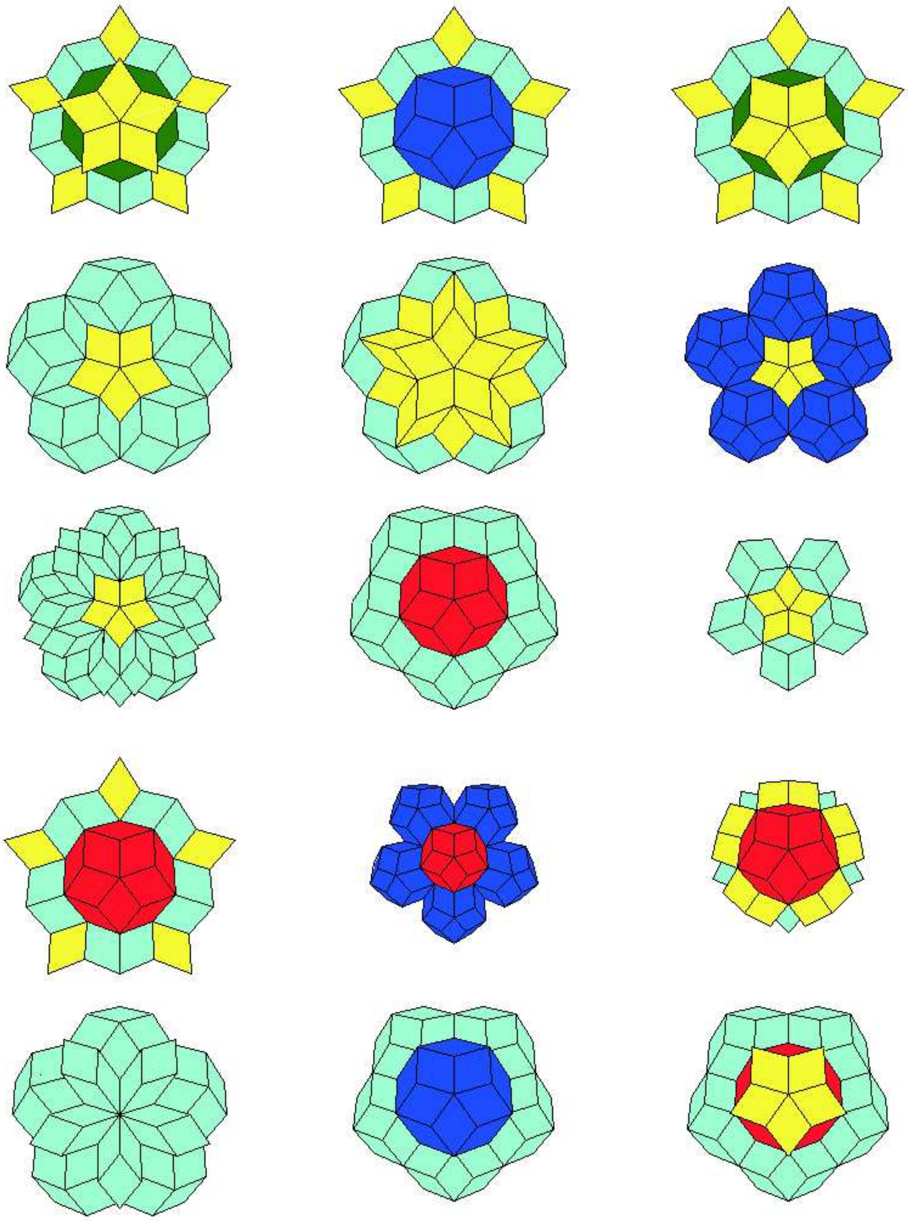
Tu je nekaj vmesnih korakov pri izdelavi trideseterca:



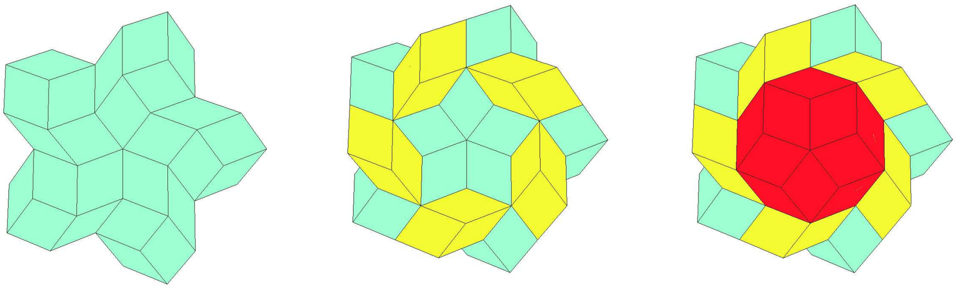
Katera izmed teh teles imajo dvojno, trojno ali petkratno rotacijsko simetrijo? Ali imajo telesa zrcalne simetrije?

3. Simetrija

Resnično vrednost rombskih teles spoznamo pri proučevanju njihove simetrije. Spodnja slika prikazuje nekaj primerov petkratne (rotacijske) simetrije (podobne primere bi lahko izdelali za trojno in dvojno simetrijo).



Tu so še trije primeri, ko nimamo vertikalne zrcalne simetrije.

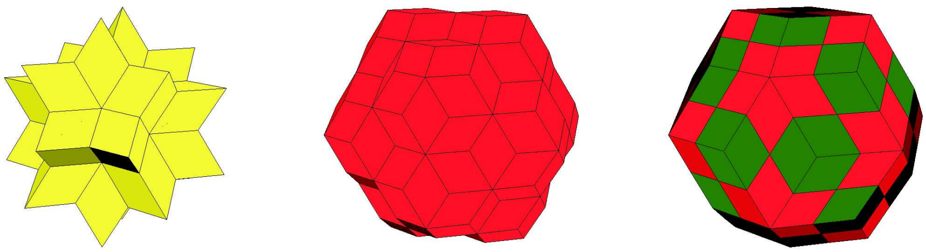


4. Ikozaedrska simetrija

Rombski trideseterec ima osi dvojne, trojne in petkratne simetrije. Osi petkratne simetrije potekajo skozi nasprotna oglišča stopnje 5, osi trojne simetrije skozi nasprotna oglišča stopnje 3, osi dvojne simetrije pa potekajo skozi središča nasprotnih mejnih ploskev. Tako imamo 6 osi prve vrste, 10 osi druge vrste in 15 osi tretje vrste. Ta tip simetrije je znan kot *ikozaedrska simetrija*, 12 oglišč stopnje 5 tvori pravilen dvajseterec.

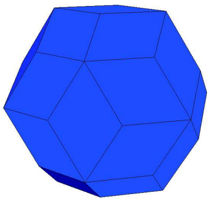
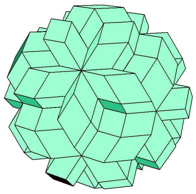
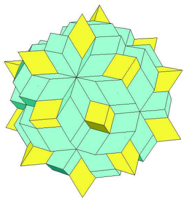
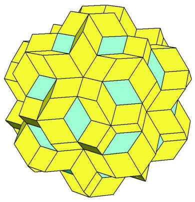
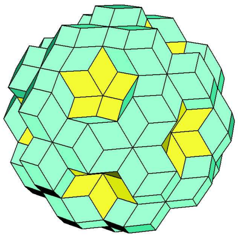
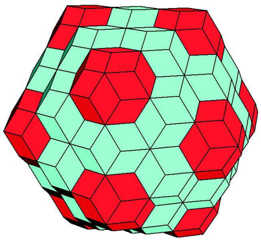
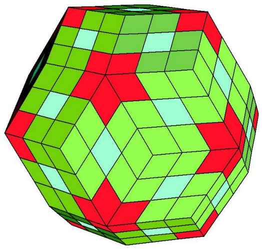
4. 1. Do dvojnega trideseterca

V tabeli prostorskih kotov vidimo, da je manjši kot pri koničastem romboedru enak $\frac{1}{20}$ polnega prostorskega kota. Zato lahko 20 romboedrov zlepimo v šestdeseterec. Nanj postavimo 12 dvajsetercev. Tako dobimo 120-terec. Dvajset lukenj zapolnimo s ploščatimi romboedri in dobimo dvojni trideseterec.

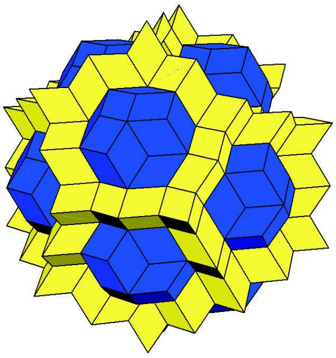
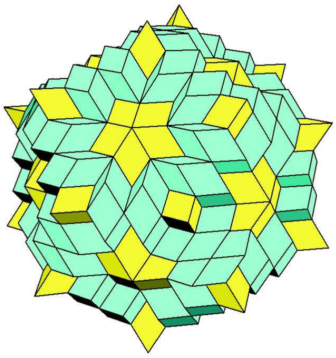
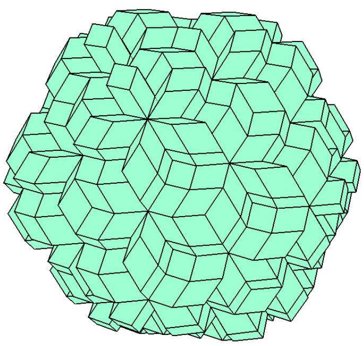
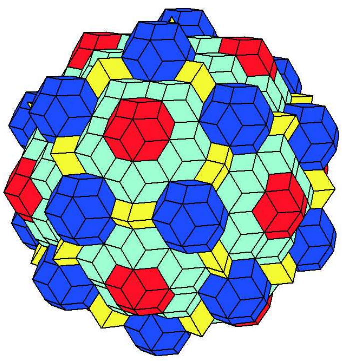


4. 2. Od trideseterca do trojnega trideseterca

Začnemo s triderseterecem. Nanj postavimio 30 dvanajstercev. Luknje zapolnimo z romboedri (rumeno). Okoli rumenih špic damo po 3 romboedre, nato nekaj dodekaedrov, 12 ikozaedrov in nekaj ploščatih romboedrov.

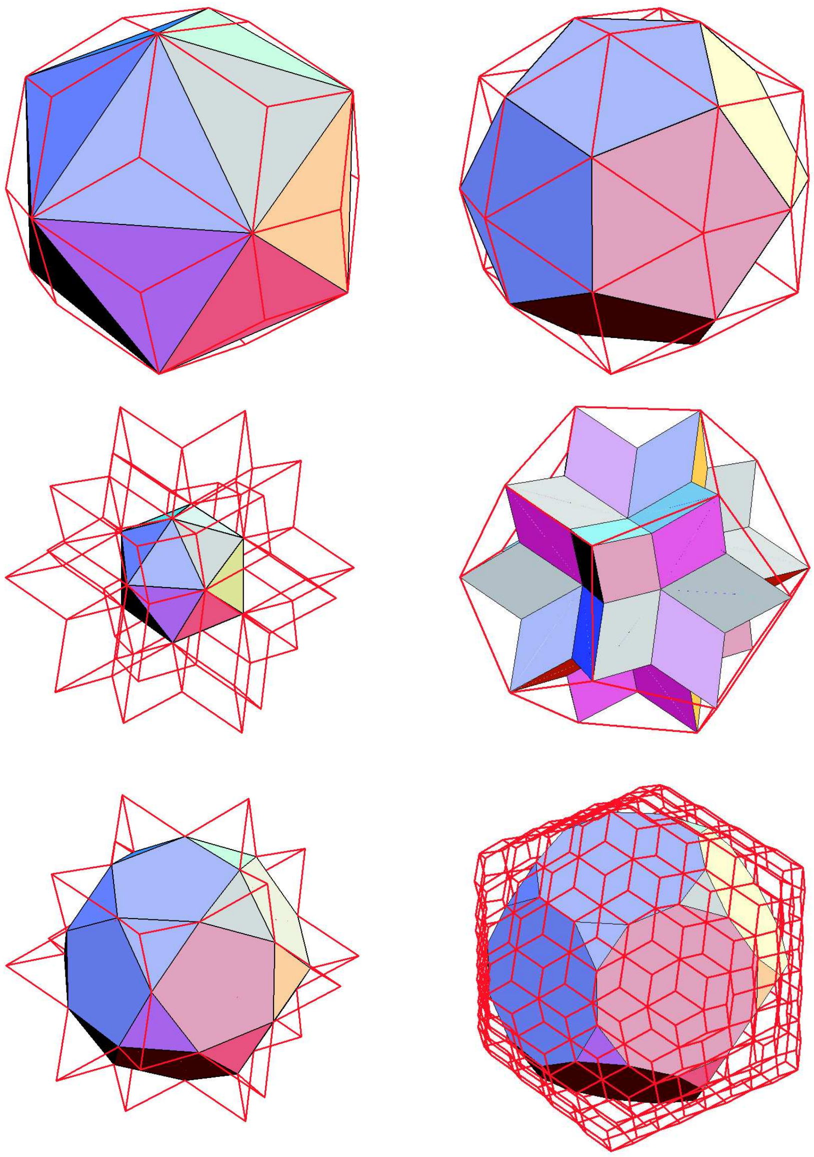








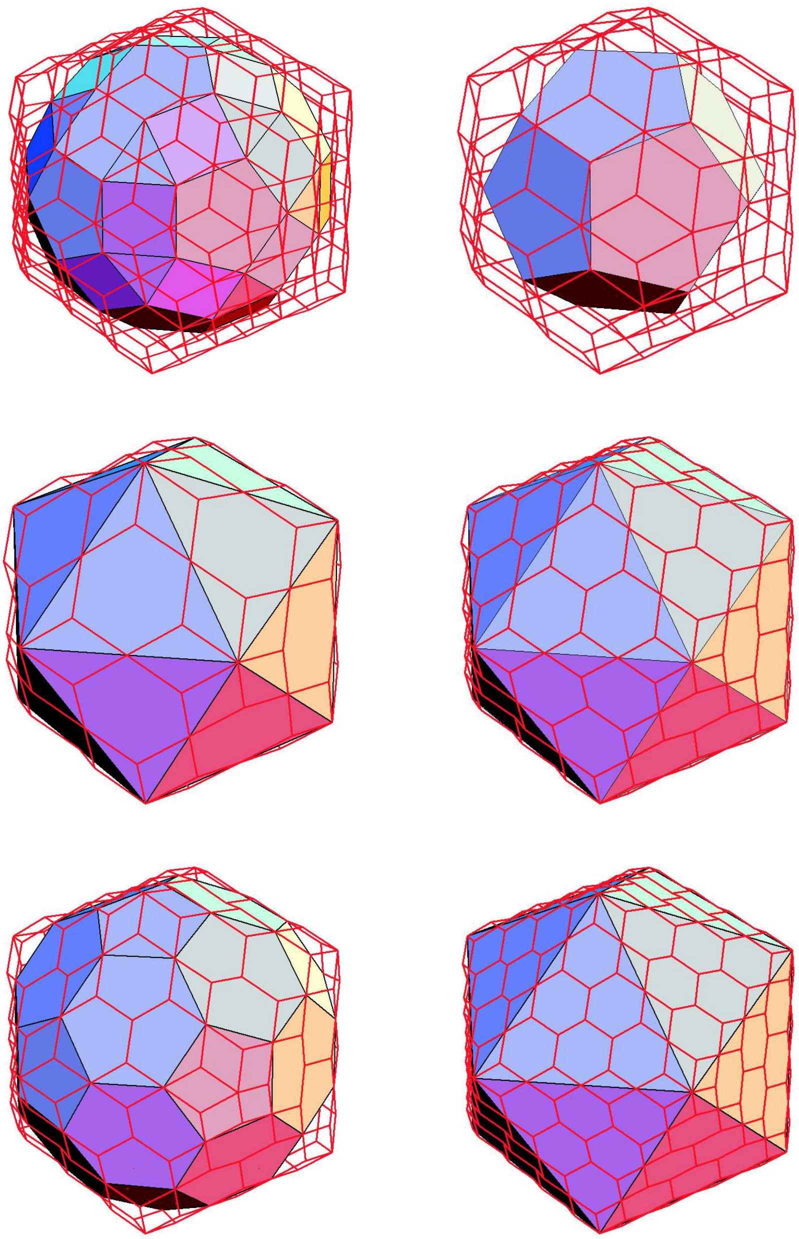
4. 3. Še nekaj primerov

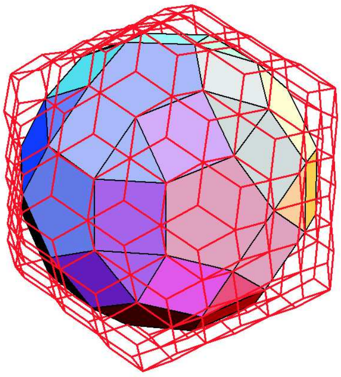
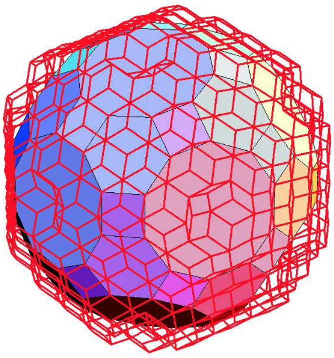





5. Odnosi med rombskimi, platonskimi in arhimedskimi telesi

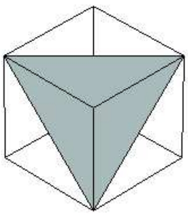
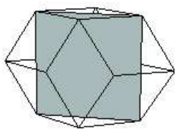
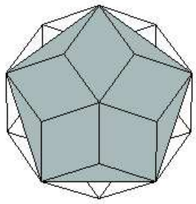
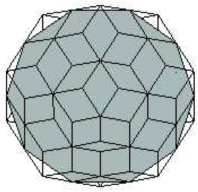
Naslednja slika prikazuje odnose med tistimi telesi, ki imajo ikozaedrsko simetrijo. Med pravilnimi telesi sta to dvajseterec in dvanajsterec, pri delno pravilnih so to dvajseterčev dvanajsterec, prisekani dvajseterec, prisekani dvanajsterec, okrnjeni dvajseterčev dvanajsterec in prisekani dvajseterčev dvanajsterec.



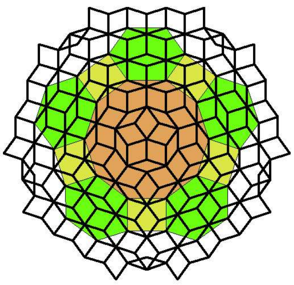
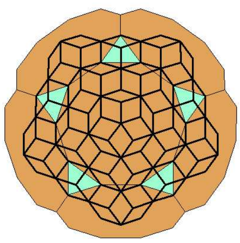
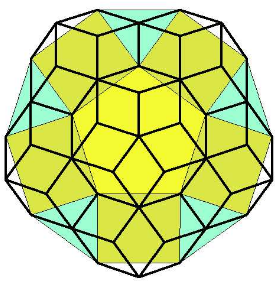


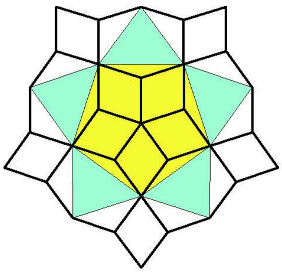



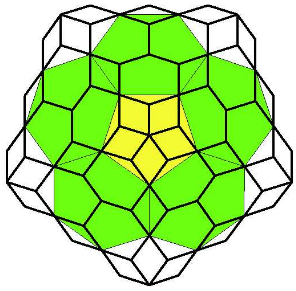
Na naslednjih slikah vidimo položaj nekaterih pravilnih večkotnikov znotraj rombskih poliedrov.

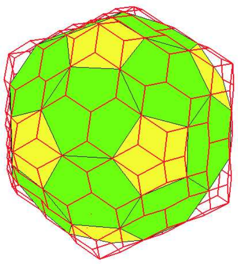
Oglejmo si še dele Arhimedskih in rombskih teles: prisekani dvajseterčev dvanajsterec, prisekani dodekaeder, prirezani dvajseterčev dvanajsterec, dvajseterčev dvanajsterec, prisekani dvajseterec.

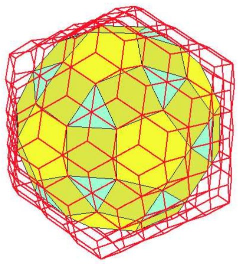




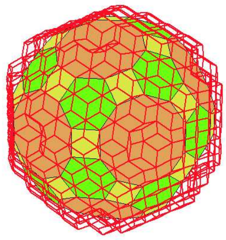


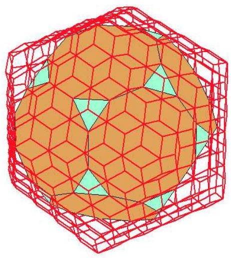


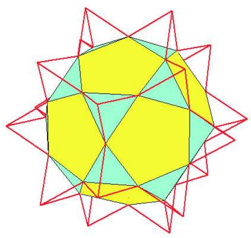
Cela telesa so na spodnjih slikah.







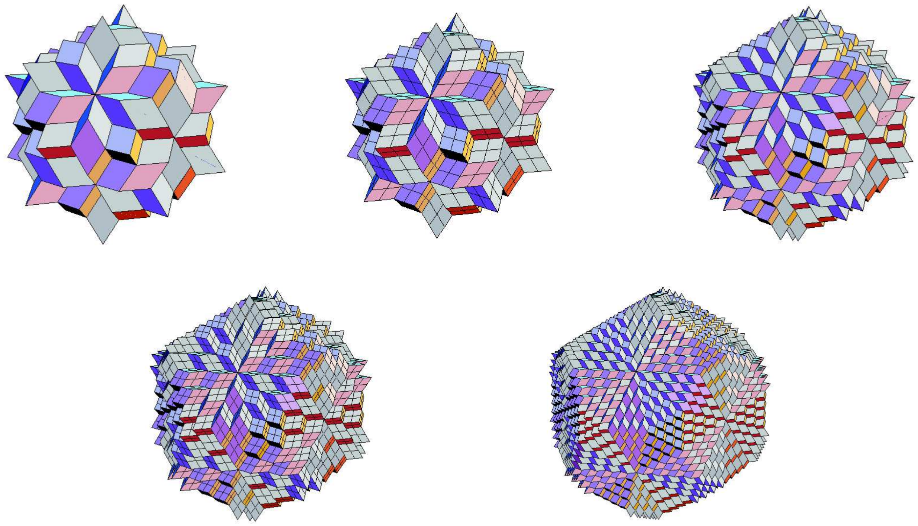


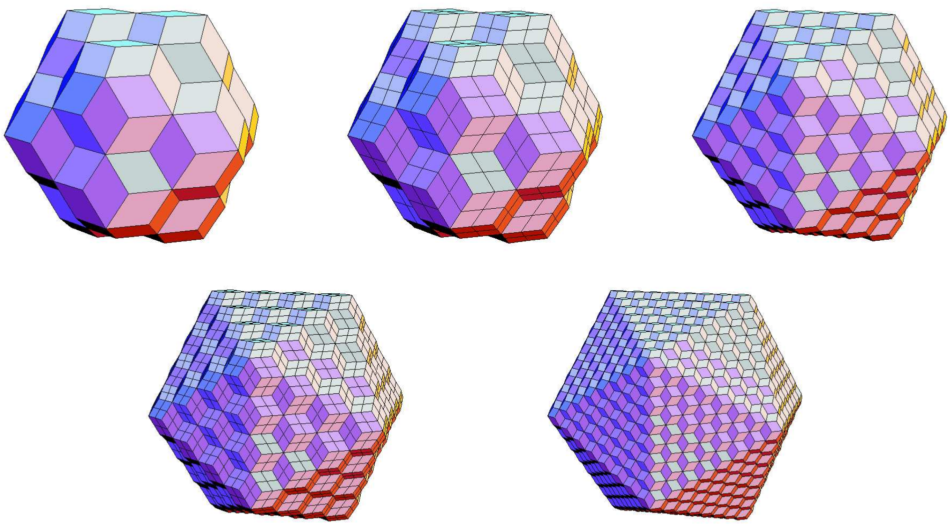


6. Posebne družine rombskih poliedrov

Z izmenjevanjem dveh operacij na rombskih telesih lahko dobimo družine teles. Takšna družina ima lahko za limito znano telo (dvajseterec, pisekani dvanajsterec). Prva operacija je *subdivizija*. Če jo gledamo kot operacijo na površini, potem razdeli romb na štiri manjše rombe. Če pa jo gledamo kot operacijo na telesu, ki je sestavljeno iz samih romboedrov, potem razdeli romboeder na osem manjših romboedrov.

Druga operacija je *inverzija* (če jo uporabimo dvakrat zaporedoma, smo na istem kot prej). V primeru konveksnega oglišča stopnje 3 izreže romboeder, katerega tri mejne ploskve imajo to skupno oglišče, v primeru konkavnega oglišča pa romboeder doda. To operacijo lahko uporabimo, če nobeni dve oglišči stopnje 3 nista sosednji. Tu je nekaj primerov.

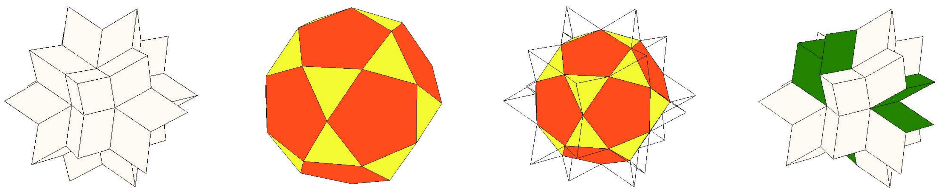


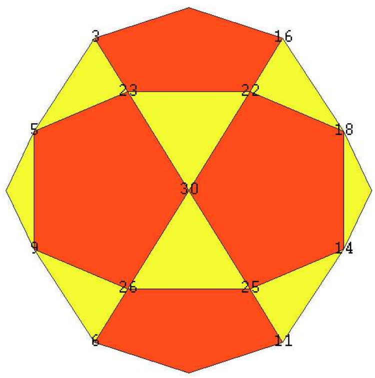


7. Konstrukcija šestdesetercev

Rombski šestdeseterec je telo, ki sestoji iz 20 špičastih romboedrov. Telo ima ikozaedrsko simetrijo. Odnose tega telesa s platonskimi in arhimedskimi telesi smo že spoznali.

Vemo tudi, da dva ploščata in dva špičasta romboedra sestavljata rombski dvanajsterec druge vrste. Prostorski kot, ki ga tvorita dva zlepljena špičasta romboedra, je enak kotu, ki ga tvorita dva ploščata romboedra in znaša $\frac{1}{10}$ polnega kota. To pomeni, da lahko dva sosednja špičasta romboedra zamenjamo z dvema ploščatima, problem pa je, na koliko načinov lahko to storimo. Tudi novo telo ima 60 mejnih ploskev, toda simetrija se izgubi.

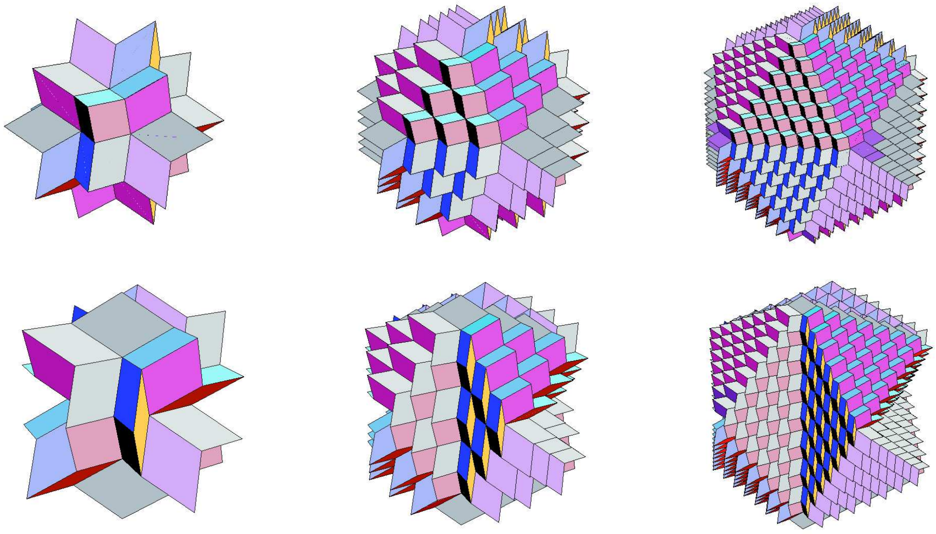




Vsak par sosednjih špičastih romboedrov je zlepljen vzdolž osi dvojne simetrije. Vsakemu takšnemu paru ustreza oglišče dvajseterčevega dvanajsterca. Recimo, da smo nadomestili takšen par. Oglišče, ki ustreza drugemu takšnemu paru, ne more biti sosednje prvemu oglišču. To pomeni, da točke, ki ustrezajo parom, tvorijo neodvisno množico v grafu dvajseterčevega dvanajsterca.

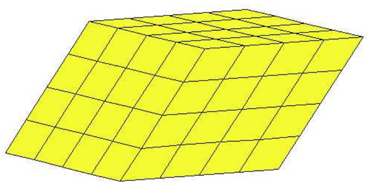
Naloga je poiskati vse neodvisne množice. Število elementov neodvisne množice je med 0 in 10. Prvotni šestdeseterec ustreza številu 0. Pri 1 imamo v bistvu eno samo možnost. Torej lahko fiksiramo prvo oglišče. To bo za nas oglišče 30. Da eliminiramo v bistvu enake neodvisne množice, potrebujemo podgrupo, ki fiksira oglišče 30. Ta podgrupa ima dva elementa in deluje kot podgrupa na 25 oglišč. (Zbrisali smo oglišče 30 in sosede 22, 23, 25 in 26.) Čim se neodvisna množica generira, tvorimo njeno orbito in eliminiramo druge elemente orbite. Ko enkrat najdemo vse različne neodvisne množice, jih klasificiramo glede na stopnjo simetrije. To pomeni, da iščemo maksimalno podgrupo ikozaedrske grupe, za katero je ta množica invariantna. Na ta način dobimo nekaj več kot 2000 možnosti.

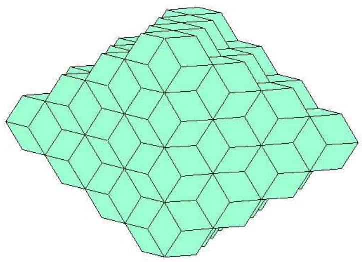
Vsakemu šestdesetercu ustreza neka popolnitev prostora. Tu sta dva primera. V prvem je limita dvajseterec, v drugem pa Jenssenov pravokotni dvajseterec ([3]). Ta zadnja družina ima simetrijo četverca.



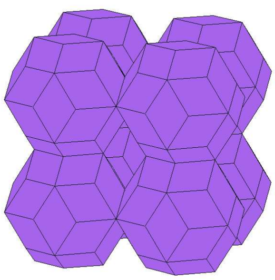
8. Zapolnjevanje prostora

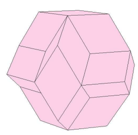
Prvi trije "zlati" rombski poliedri sodijo med pet t. i. paraleloedrov Fedorova in lahko zapolnijo prostor ([10]).

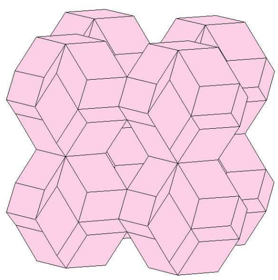




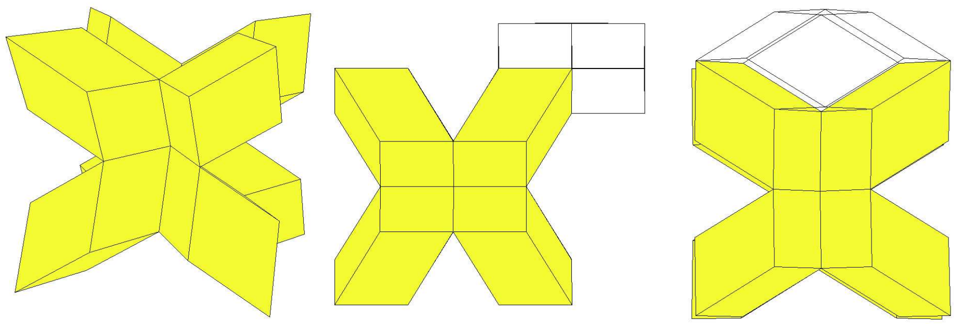
V [10] je podana množica tridesetercev. Praznine med njimi lahko zapolnimo z nekim nekonveksnim poliedrom.



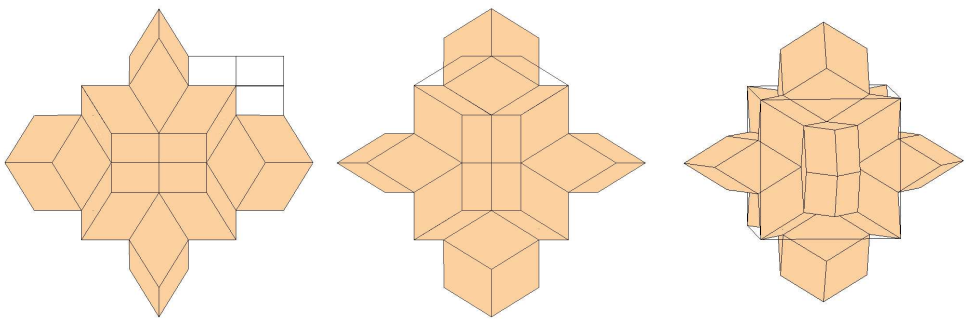




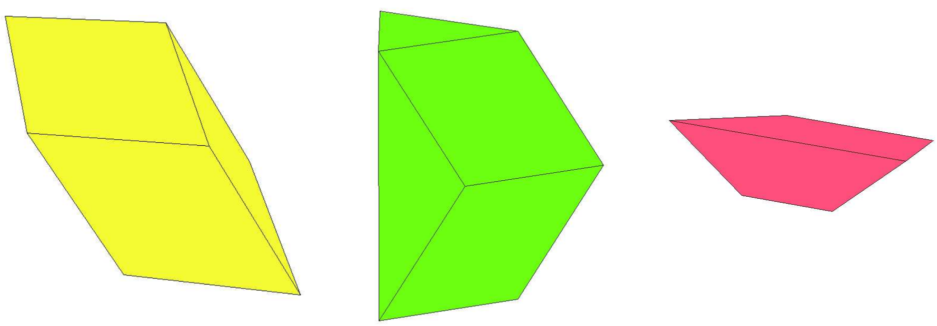
Naš naslednji cilj je zapolnitev prostora s špičastimi romboedri in rombskimi dodekaedri 2. vrste. Bistveni element konstrukcije je rombski šestdeseterec, kjer odstranimo 12 romboedrov, tako da ostali tvorijo kocko. Na to konstrukcijo lahko prilepimo dvanajsterec tako, da je natanko ena njegova četrtina v kocki.



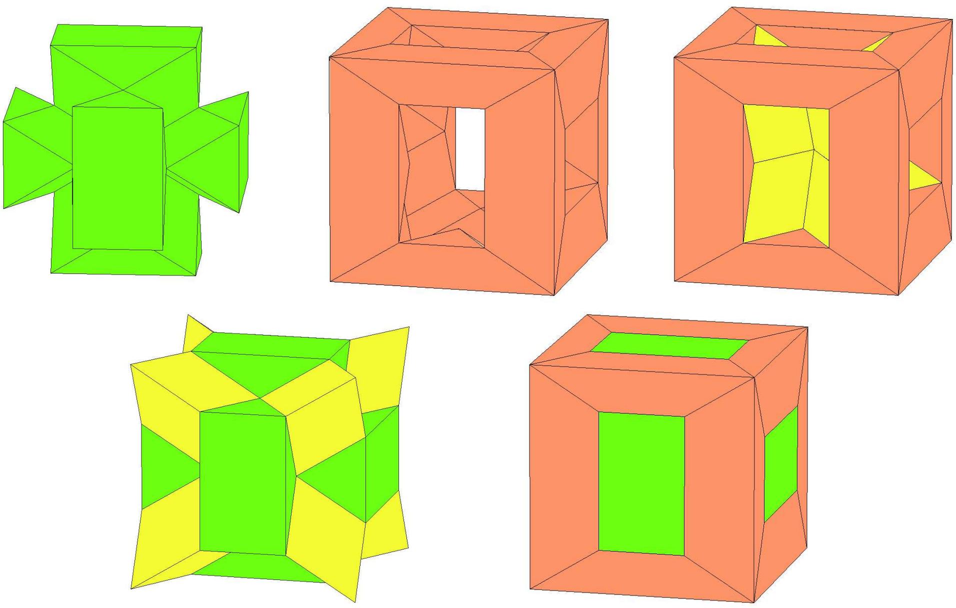
Dvanajst romboedrov lahko nadomestimo s šest dvanajsterci. Natanko polovica vsakega je znotraj kocke.



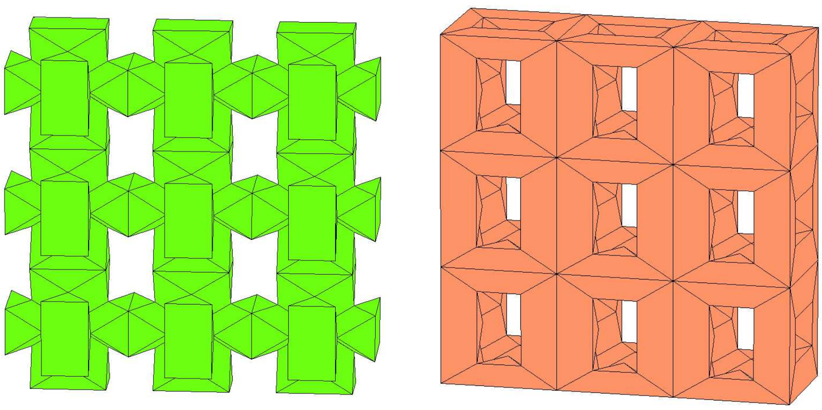
Kocko lahko torej razrežemo na 8 špičastih romboedrov, 12 četrtin in 6 polovic dvanajstercev (skupaj 6 rombskih dvanajstercev).

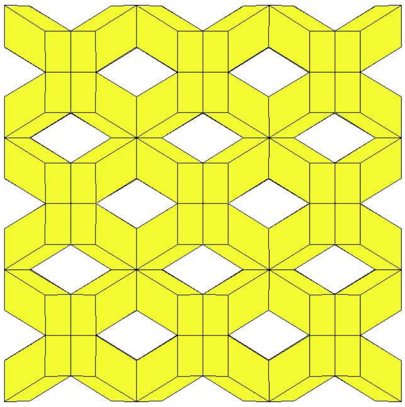
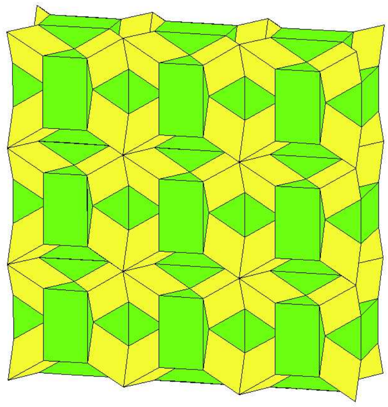
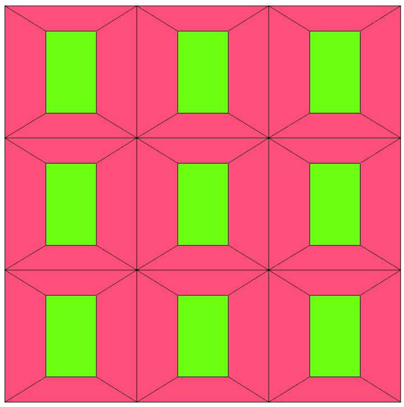


Omenjena razčlenitev kocke je prikazana na spodnjih slikah.

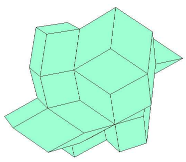
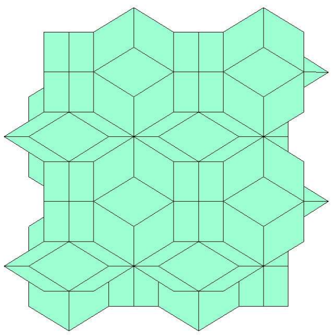
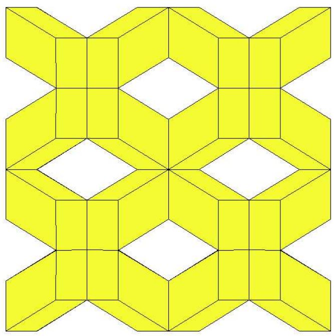


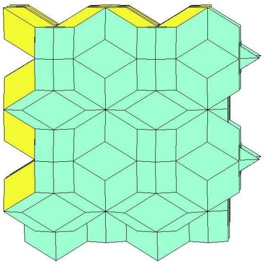
Naslednja telesa predstavljajo en sloj v zapolnitvi prostora.



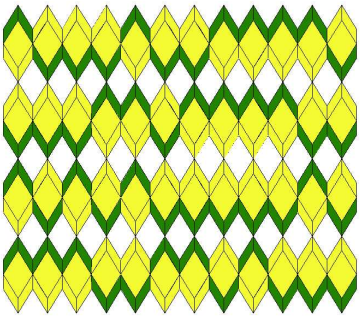




Da bi zapolnili prostor, ni potrebno deliti dvanajstercev. Le postaviti jih moramo v pravilni kombinaciji.

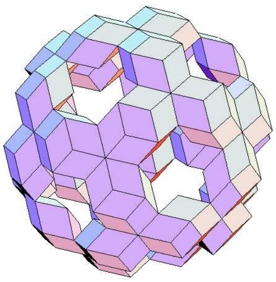


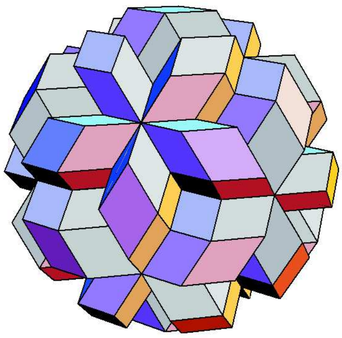
To poglavje bomo končali z enostavnim primerom neperiodične zapolnitve prostora. Prostor zapolnimo z dvanajsterci. Potem se spomnimo, da le-te nadomestimo z dvema špičastima in dvema ploščatima romboedroma. To pa lahko naredimo na dva načina, ki ju lahko slučajno izbiramo.

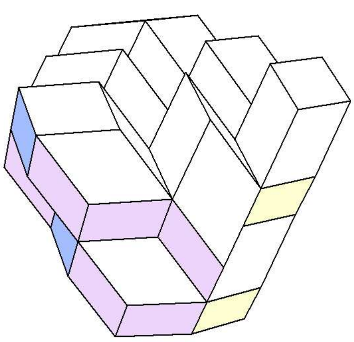


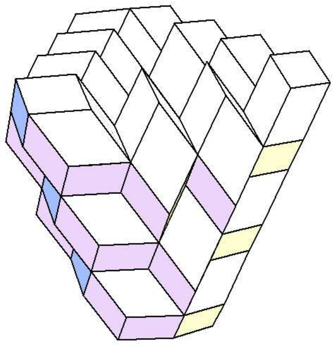
9. Telesa Bilinskega

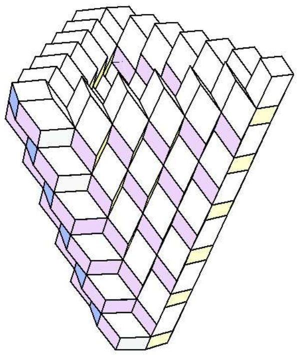
Na naslednjih slikah so telesa, sestavljena iz samih dvanajstercev 2. vrste ali pa je njihov vrhnji sloj iz teh dvanajstercev.

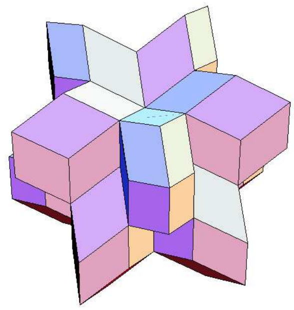


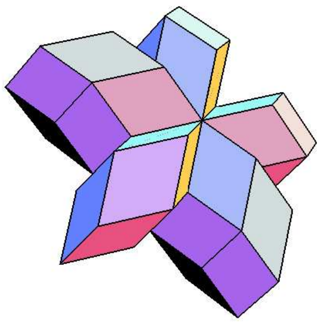


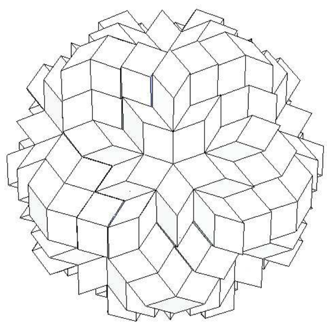


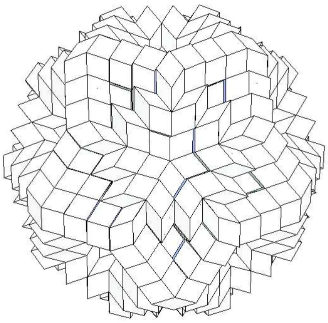
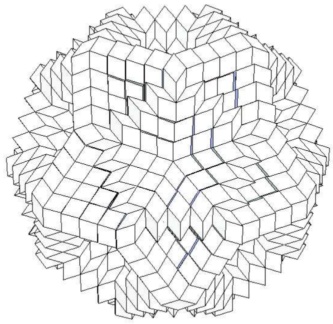
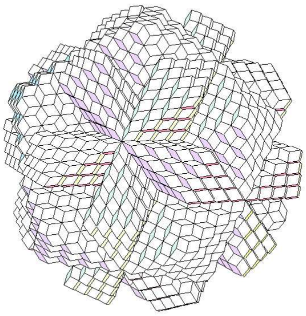
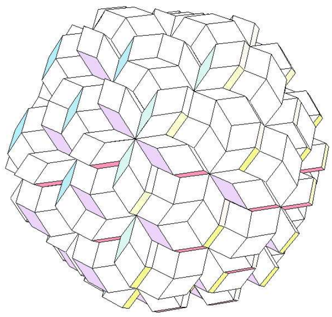






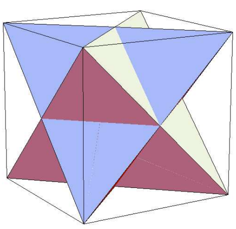
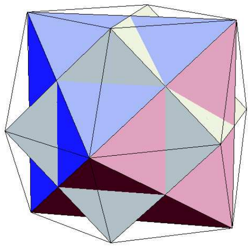
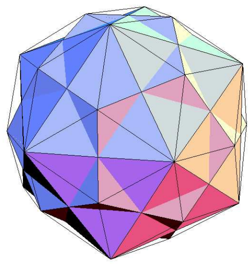




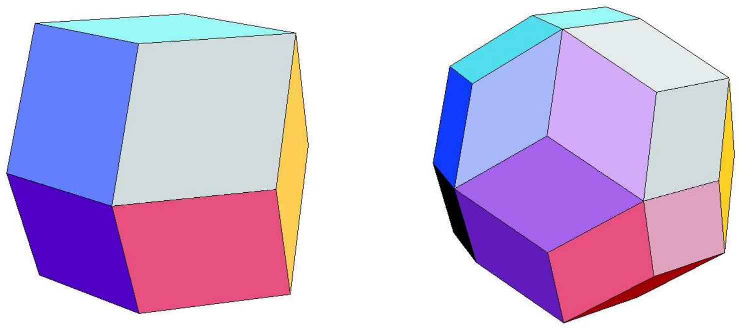





10. Še malo zgodovine

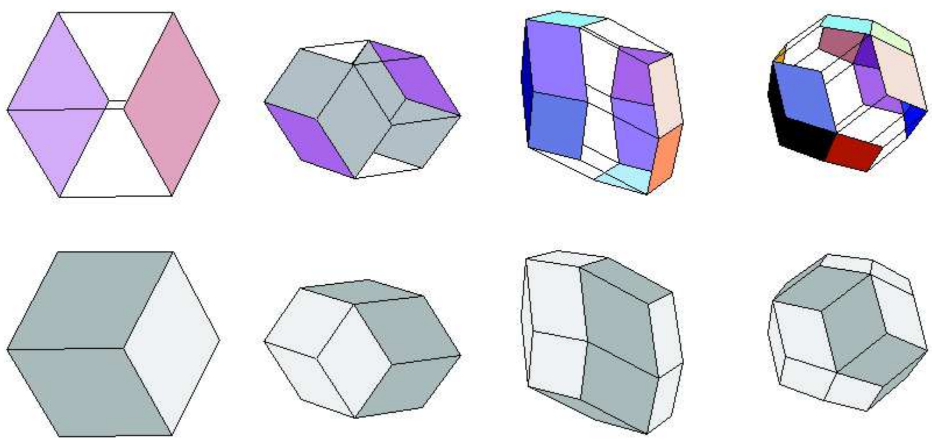
Kot smo že zapisali, je bil začetnik proučevanja rombskih poliedrov Johannes Kepler. Proučeval je kompozicijo platonskega telesa in njegovega duala (kot temu danes rečemo). Četverec je dual samega sebe. Dualni telesi sta kocka in osmerec ter dvanajsterec in dvajseterec.

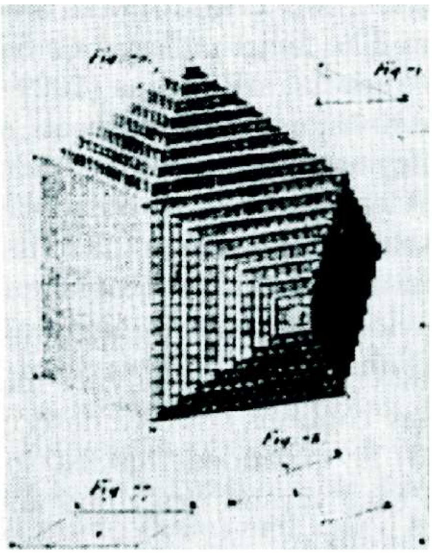
Prvi kompoziciji je Kepler rekel *stella octangula*, bila pa je že znana tudi drugim. Tudi drugi dve kompoziciji najdemo že v Jamnitzerjevem *Corporum Regularium* ([2]). Kepler je definiral pojem *polregularnega telesa*, ki je izključeval kocko in romboedra. Tako je ostal samo rombski dvanajsterec in rombski dvajseterec. Pozneje je Kepler ugotovil, da lahko dvanajsterec dobimo tako, da na mejne ploskve kocke nalepimo štiristrane piramide, katerih stranske ploskve tvorijo z osnovno ploskvijo kot $45°$.



Rezultate Keplerja, Fedorova in Bilinskega lahko povzamemo takole: *Če odstranimo pas rombov pri tridesetercu, dobimo rombski dvajseterec* (Kepler, Fedorov), *če odstranimo pas rombov pri dvajsetercu, dobimo rombski dvanajsterec 2. vrste* (Bilinski), *iz dvanajsterca dobimo romboeder* (Kepler, Bilinski), *iz romboedra dobimo dieder* (Bilinski).

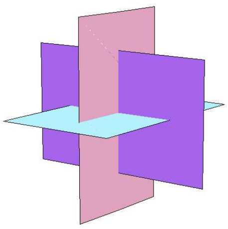
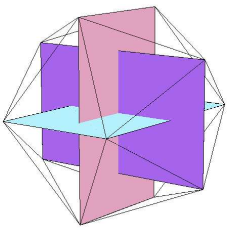
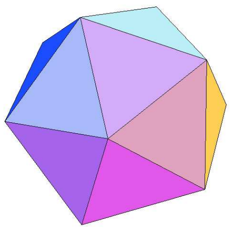


Naslednja slika je iz knjige *Traite de Mineralogie*, ki jo je napisal Francoz *Hauy* leta 1801, prikazuje pa, kako lahko zlagamo kockice v rombski dvanajsterec.

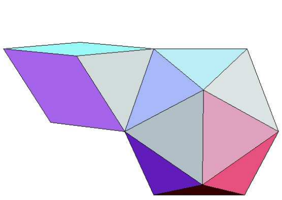
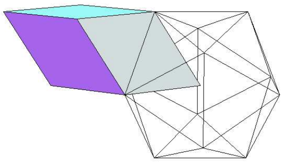
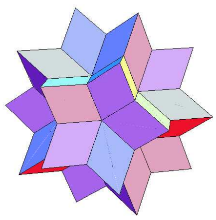


11. Izpeljava rombskih teles iz rombskega dvajseterca

Dvanajst oglišč dvajseterca predstavlja oglišča treh med seboj pravokotnih zlatih pravokotnikov ([2]).

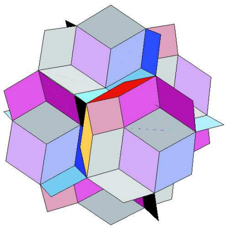
  

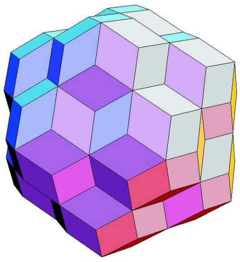
Na vsaki mejni ploskvi konstruiramo špičasti romboeder. Na ta način dobimo šestdeseterec.

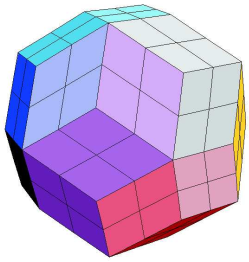
  

Dodamo diedre na ogliščih stopnje 4. Nato invertiramo 10 ploskev okoli oglišča stopnje

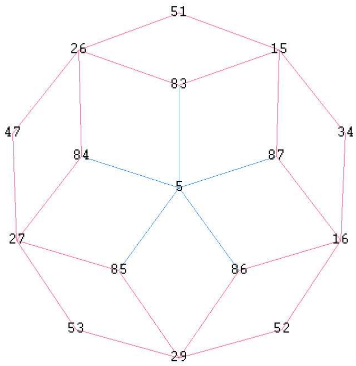
5. Ta operacija pomeni dodajanje rombskega dvajseterca. Nato dodamo še ploščate romboedre na oglišča stopnje 3. Dobimo dvojni rombski trideseterec (triakontaeder).

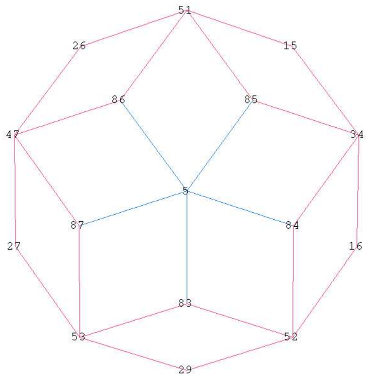


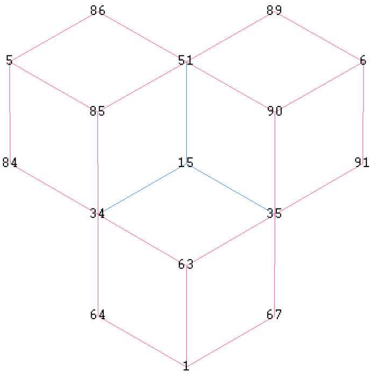


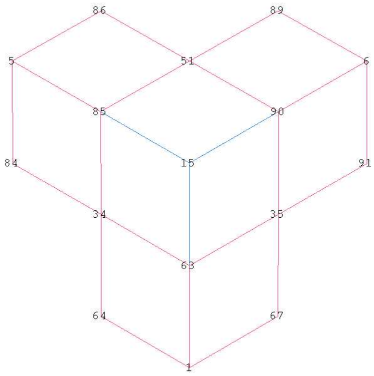


Zadnji dve operaciji sta inverziji.

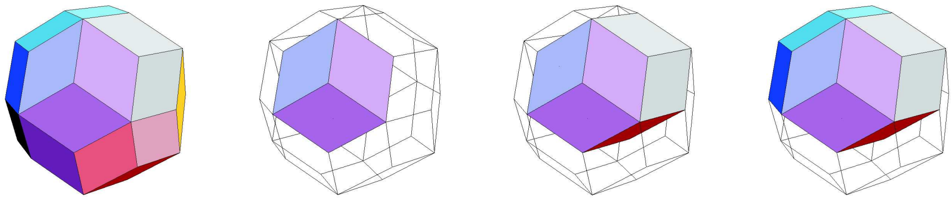








Z odstranitvijo subdivizije in razpolovitvijo koordinat dobimo trideseterec.



Druga konveksna rombska telesa dobimo kot dele trideseterca.

12. Nekaj nalog na rombskih telesih

Na naslednjih treh straneh je po ena naloga na rombskem telesu, sledijo pa še rešitve nalog. V vsaki nalogi je dano telo z labirintom. Narisano je, kako ga vidimo, če ga pogledamo s sprednje (A), z zadnje (B), z leve (C), desne (D), zgornje (E) in s spodnje (F) strani. Povezati je treba ploskev, na kateri je črna pika, s ploskvijo, na kateri je siva pika. Ploskev s črno piko označimo z 1, nato pa vse ploskve, preko katerih se pomikamo do sive pike, označujemo po vrsti z 2, 3, 4 itd.

Literatura:

[1] H. M. S. Coxeter, *Regular Polytopes, Third Edition*, Dover Publications, New York, 1973.

[2] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] M. Goldberg, *Unstable Polyhedral Structures*, Mathematics Magazine **51** (1978), str. 165 – 170.

[4] J. W. Gray, *Mastering Mathematica, Second Edition*, Academic Press, London, 1998.

[5] I. Hafner, T. Žitko, B. Jurčič Zlobec, *Gallery of rhombic polyhedra*, Visual Mathematics **4**/1 (2002), članek št. 4.

[6] I. Hafner, *Tri zadatka o rompskom dodekaedru 2. vrste*, Matematičko fizički list **50** (1999/2000), str. 11 – 12.

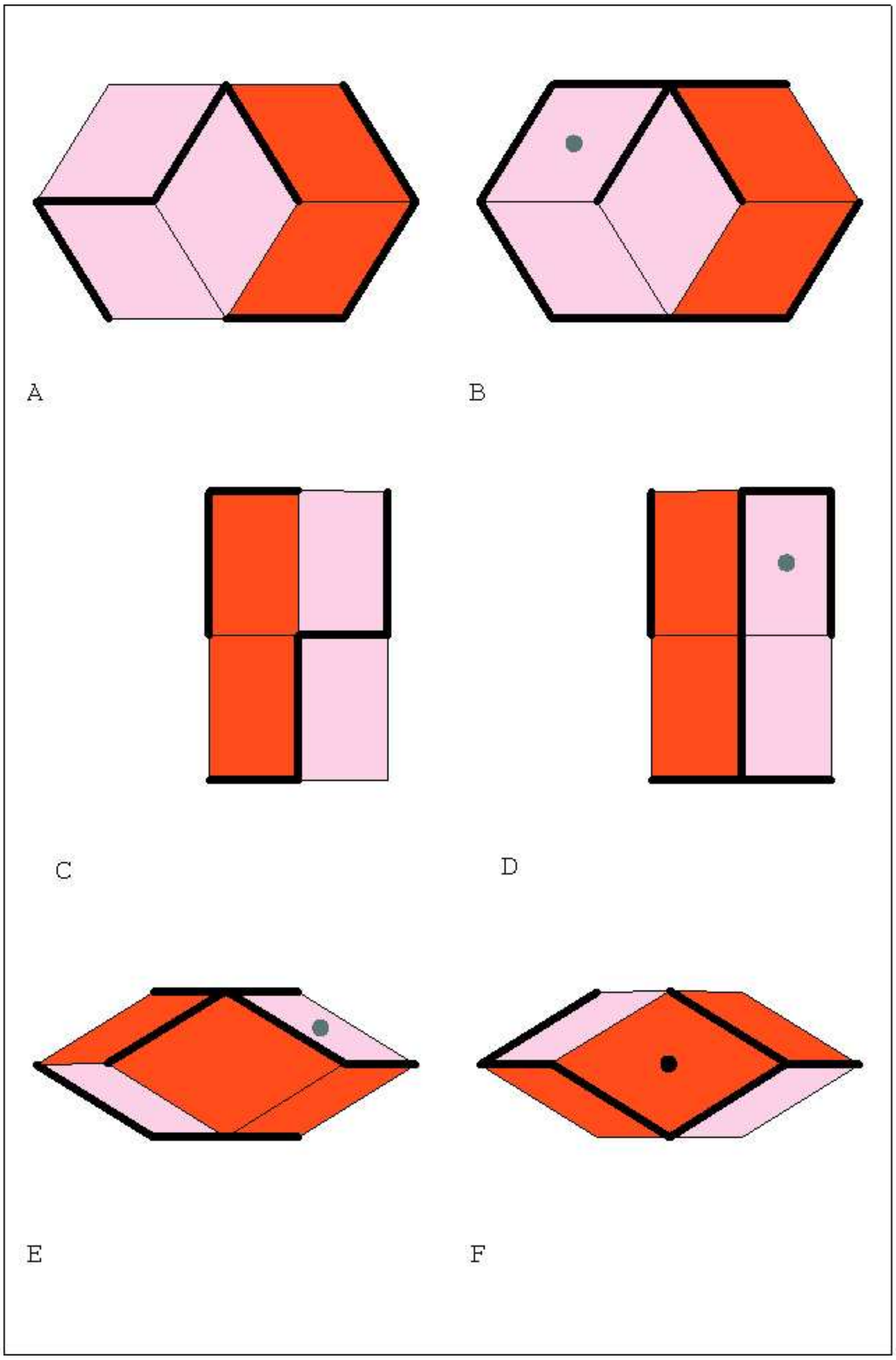
[7] G. Hart, *Johannes Kepler's Polyhedra*, `http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler.html`

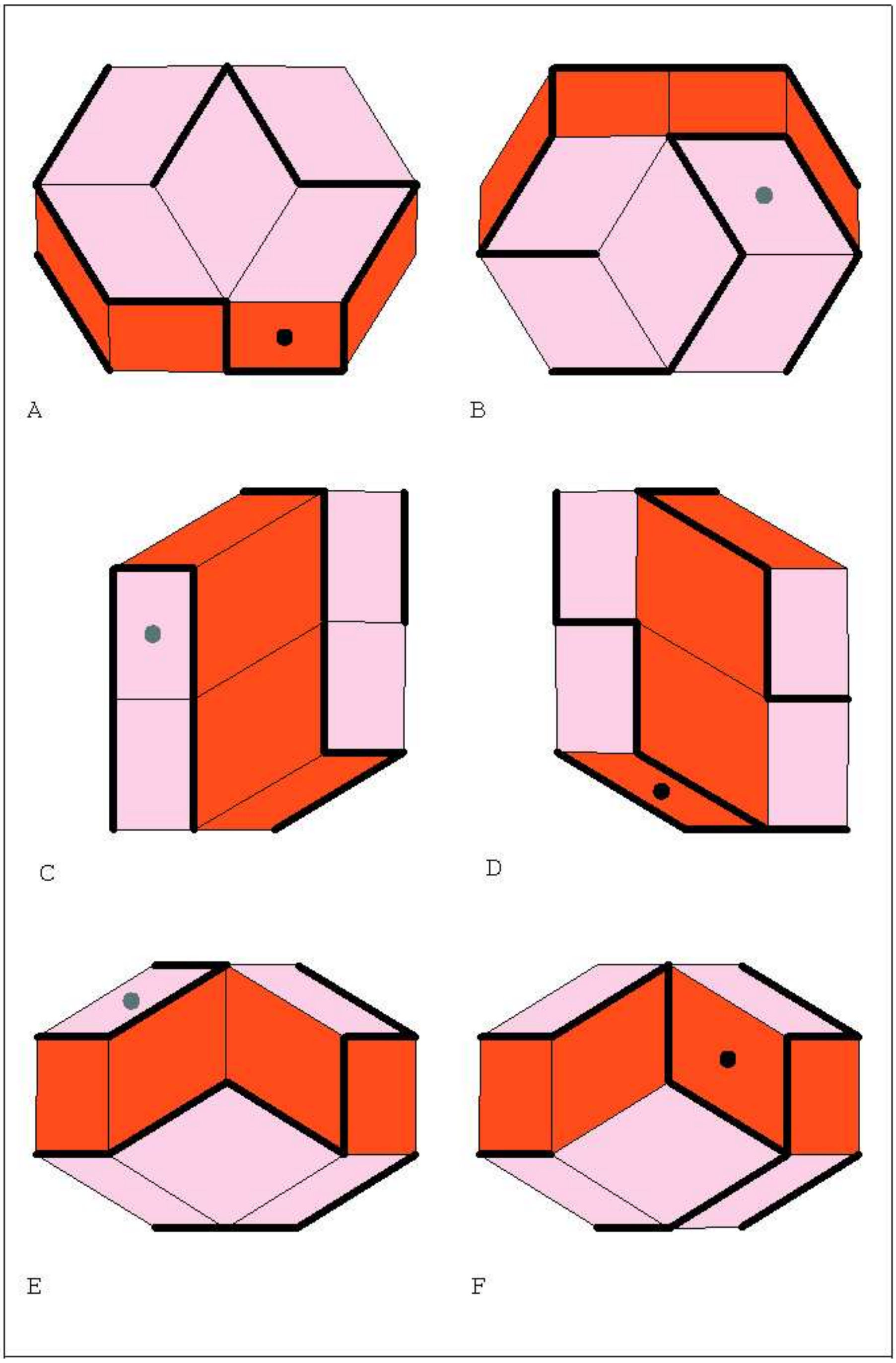
[8] T. Ogawa, *Symmetry of three-dimensional quasicrystals*, `http://members.tripod.com/vismath2/ogawa/3d.htm`

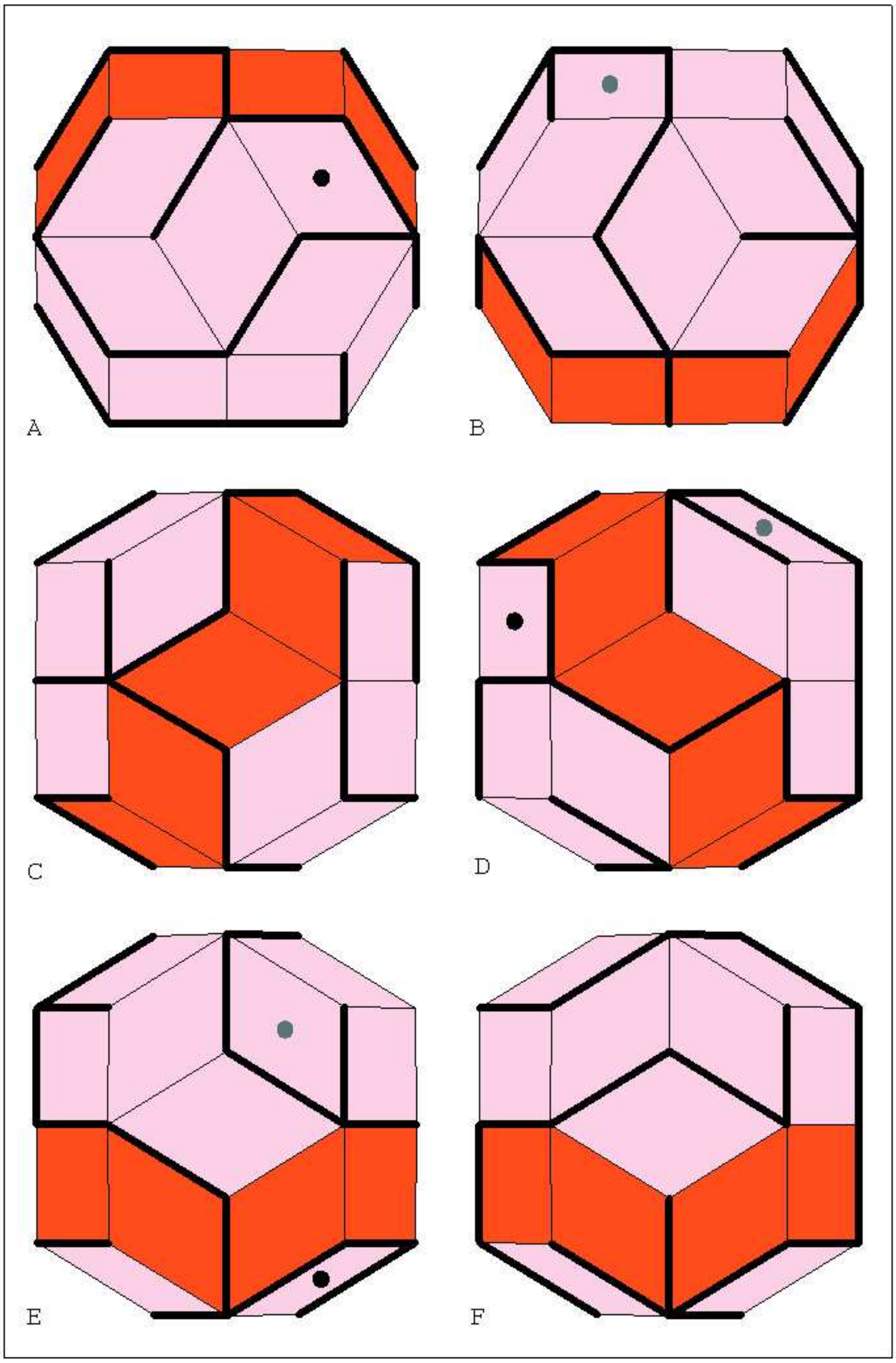
[9] W. W. Rouse Ball, H. M. S. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays, Thirteen Edition*, Dover Publications, New York, 1987.

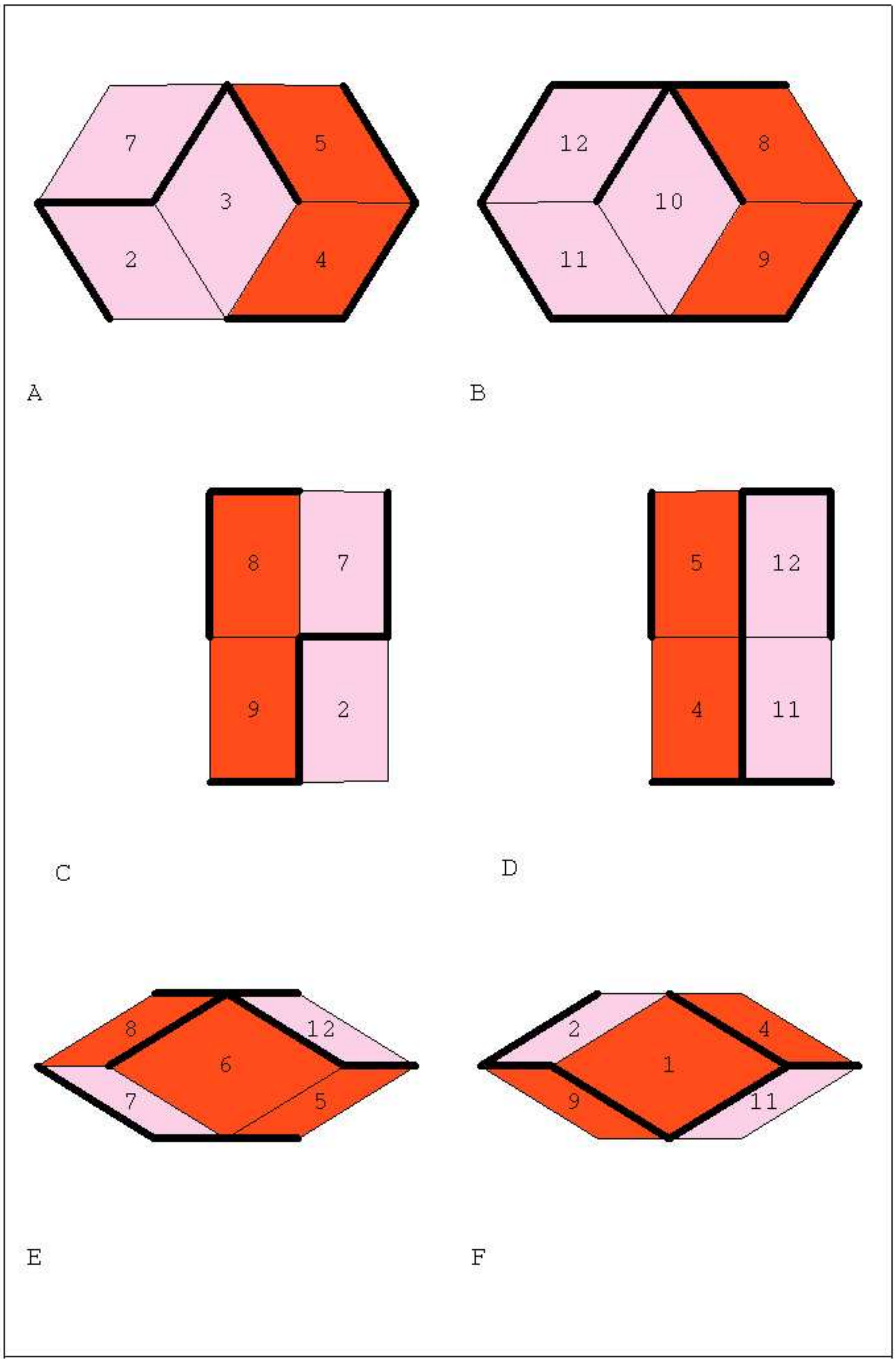
[10] R. Williams, *The Geometrical Foundation of Natural Structure*, Dover Publication. Inc, New York, 1972.

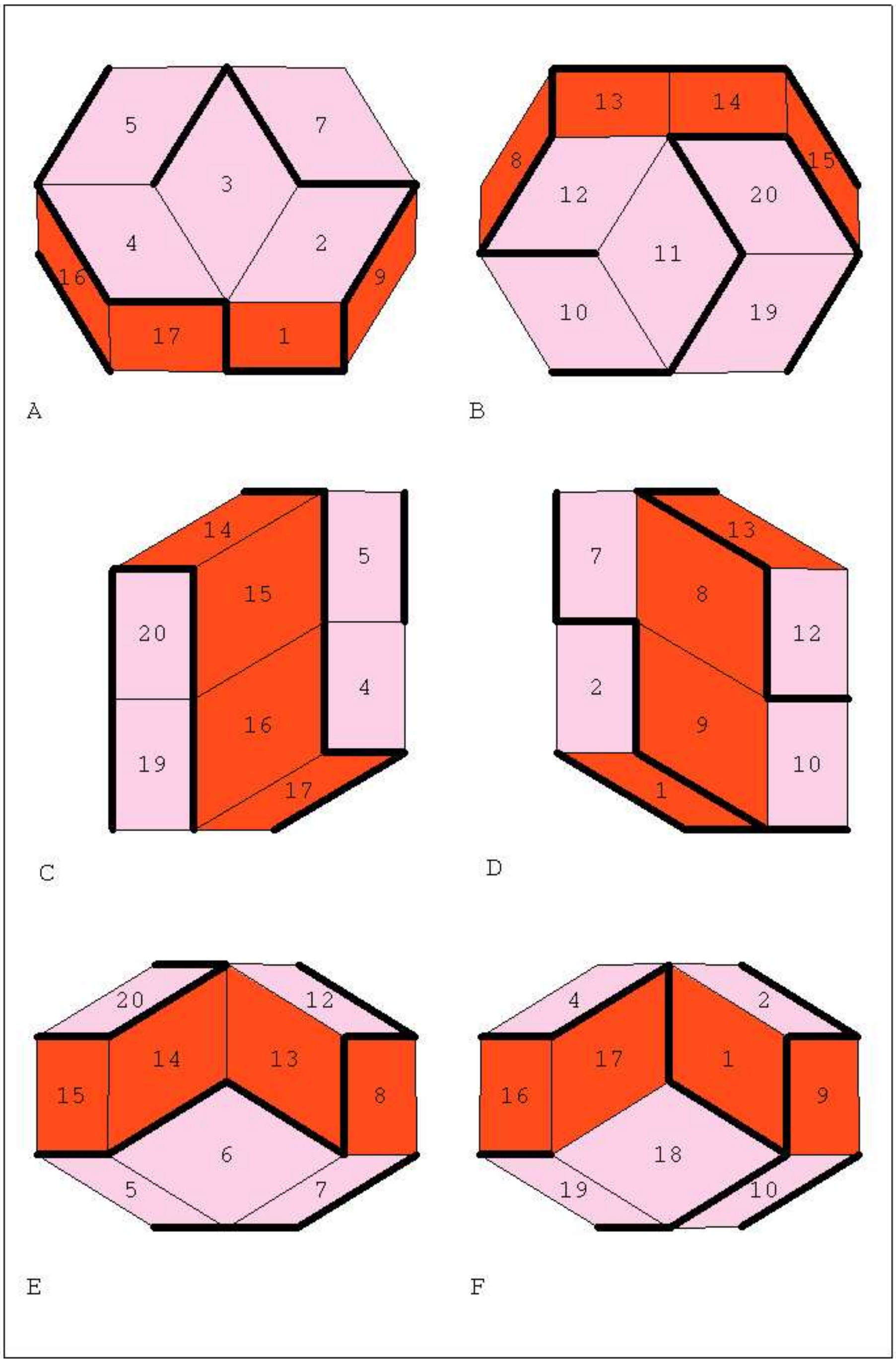
[11] `http://torina.fe.uni-lj.si/˜izidor/`

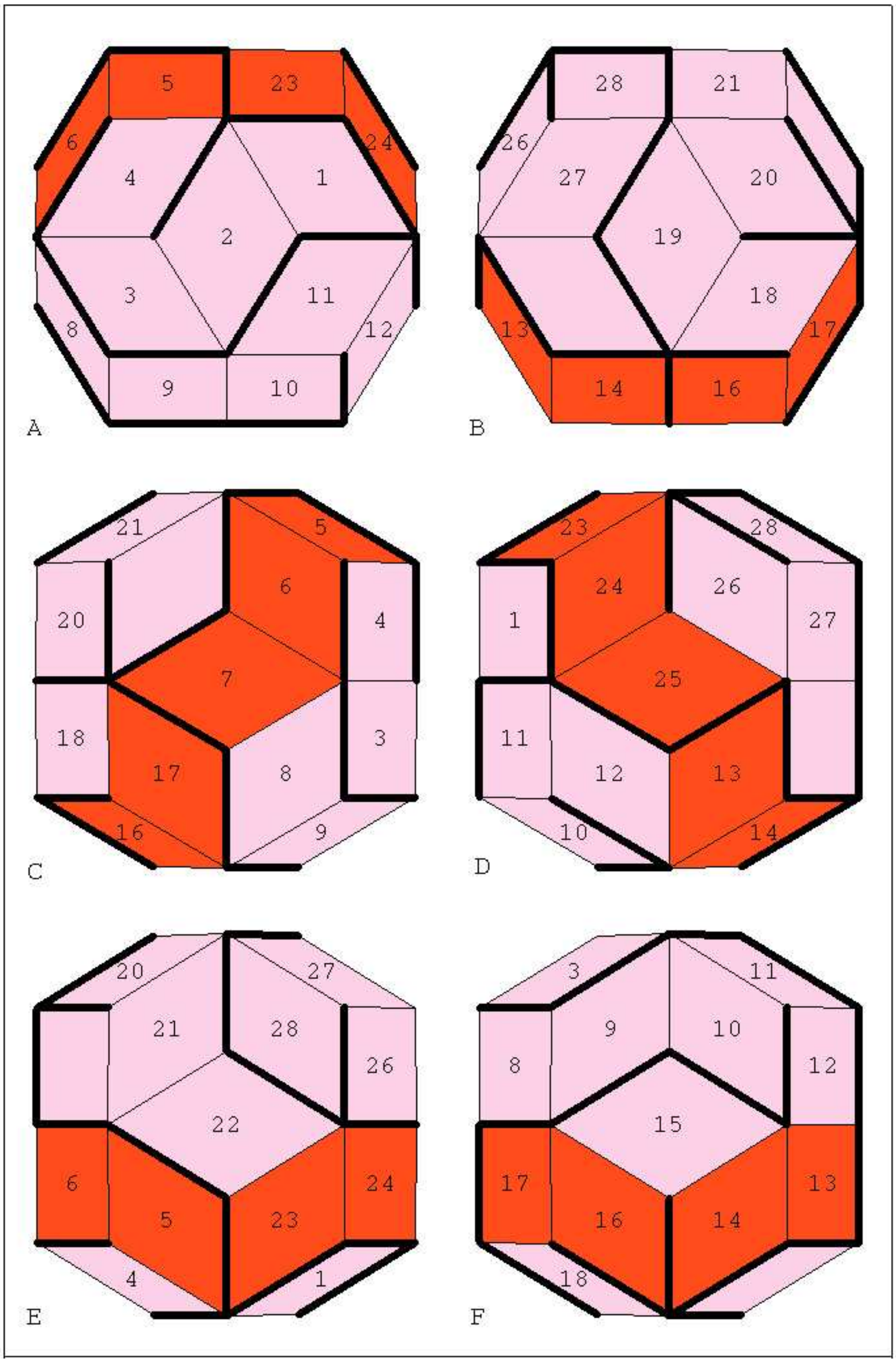

A
B
C
D
E
F


A
B
C
D
E
F


A
B
C
D
E
F


7
5
3
2
4
A
12
8
10
11
9
B
8
7
9
2
C
5
12
4
11
D
8
12
6
7
5
E
2
4
1
9
11
F


5
7
3
4
2
16
9
17
1
A
13
14
8
15
12
20
11
10
19
B
14
5
15
20
4
16
19
17
C
7
13
8
12
2
9
10
1
D
20
12
14
13
15
8
6
5
7
E
4
2
17
1
16
9
18
19
10
F


5 23
6 24
4 1
2
3 11
8 12
9 10
A
28 21
26
27 20
19
18
13 17
14 16
B
21 5
6
20 4
7
18 3
17 8
16 9
C
23 28
24 26
1 27
25
11
12 13
10 14
D
20 27
21 28
26
22
6 24
5 23
4 1
E
3 11
9 10
8 12
15
17 13
16 14
18
F