Zlati rez

B. Jurčič Zlobec[1]

[1]University of Ljubljana,
Faculty of Electrical Engineering
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenia

Bogotá, Colombia, 2011

Vsebina

Filotaksa

Pojem *filotaksa* se je v začetku nanašal na razporeditev listov okoli stebla rastline.

- Razporeditev listov je običajno taka, da so čimbolj obsijani s sončno svetlobo.
- Razporeditev cvetov v socvetju, kot na primer razporeditev brstičev v cvetu sončnice je taka, da je prostor čim bolj izkoriščen.
- Izvor besede filotaxis je iz grščine φυλλοταξις: φυλλον *list* in ταξις *red, razpored* ali *orientacicija*, ki izvira iz besede τασσω in pomeni *ureditev*.

Filotaksa

Pojem *filotaksa* se je v začetku nanašal na razporeditev listov okoli stebla rastline.

- Razporeditev listov je običajno taka, da so čimbolj obsijani s sončno svetlobo.
- Razporeditev cvetov v socvetju, kot na primer razporeditev brstičev v cvetu sončnice je taka, da je prostor čim bolj izkoriščen.
- Izvor besede filotaxis je iz grščine φυλλοταξις: φυλλον *list* in ταξις *red, razpored* ali *orientacicija*, ki izvira iz besede τασσω in pomeni *ureditev*.

Filotaksa

Pojem *filotaksa* se je v začetku nanašal na razporeditev listov okoli stebla rastline.

- Razporeditev listov je običajno taka, da so čimbolj obsijani s sončno svetlobo.
- Razporeditev cvetov v socvetju, kot na primer razporeditev brstičev v cvetu sončnice je taka, da je prostor čim bolj izkoriščen.
- Izvor besede filotaxis je iz grščine φυλλοταξις: φυλλον *list* in ταξις *red*, *razpored* ali *orientacicija*, ki izvira iz besede τασσω in pomeni *ureditev*.

Filotaksa

Pojem *filotaksa* se je v začetku nanašal na razporeditev listov okoli stebla rastline.

- Razporeditev listov je običajno taka, da so čimbolj obsijani s sončno svetlobo.
- Razporeditev cvetov v socvetju, kot na primer razporeditev brstičev v cvetu sončnice je taka, da je prostor čim bolj izkoriščen.
- Izvor besede filotaxis je iz grščine φυλλοταξις: φυλλον *list* in ταξις *red, razpored* ali *orientacicija*, ki izvira iz besede τασσω in pomeni *ureditev*.

Sončnica

- Zanimala nas bo razporeditev semen v glavi sončničnega cveta.
- Leonardo da Vinci je bil prvi, ki je opazil, da razporeditev semen v cvetu sončnice določa optimizacija prostora.
- Rezultat je razporeditev semen v parih nasprotno usmerjenih spiral.
- Glava sončničnega cveta raste od znotraj navzven. Nov brstič nastane v okolici središča cveta, kjer je največ prostora.
- Razporeditev semen ima mnogo zanimivih lastnosti, ki se opišejo v jeziku matematike, med drugim z razmerjem zlatega reza in Fibonaccijevim zaporedjem.

Sončnica

- Zanimala nas bo razporeditev semen v glavi sončničnega cveta.
- Leonardo da Vinci je bil prvi, ki je opazil, da razporeditev semen v cvetu sončnice določa optimizacija prostora.
- Rezultat je razporeditev semen v parih nasprotno usmerjenih spiral.
- Glava sončničnega cveta raste od znotraj navzven. Nov brstič nastane v okolici središča cveta, kjer je največ prostora.
- Razporeditev semen ima mnogo zanimivih lastnosti, ki se opišejo v jeziku matematike, med drugim z razmerjem zlatega reza in Fibonaccijevim zaporedjem.

Sončnica

- Zanimala nas bo razporeditev semen v glavi sončničnega cveta.
- Leonardo da Vinci je bil prvi, ki je opazil, da razporeditev semen v cvetu sončnice določa optimizacija prostora.
- Rezultat je razporeditev semen v parih nasprotno usmerjenih spiral.
- Glava sončničnega cveta raste od znotraj navzven. Nov brstič nastane v okolici središča cveta, kjer je največ prostora.
- Razporeditev semen ima mnogo zanimivih lastnosti, ki se opišejo v jeziku matematike, med drugim z razmerjem zlatega reza in Fibonaccijevim zaporedjem.

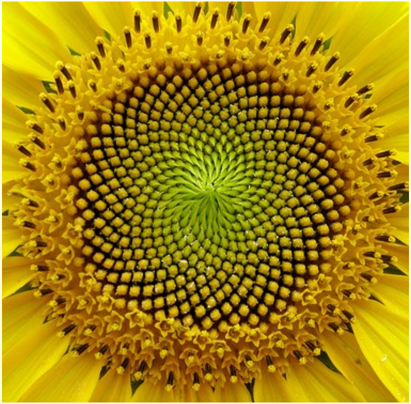
Sončnica

- Zanimala nas bo razporeditev semen v glavi sončničnega cveta.
- Leonardo da Vinci je bil prvi, ki je opazil, da razporeditev semen v cvetu sončnice določa optimizacija prostora.
- Rezultat je razporeditev semen v parih nasprotno usmerjenih spiral.
- Glava sončničnega cveta raste od znotraj navzven. Nov brstič nastane v okolici središča cveta, kjer je največ prostora.
- Razporeditev semen ima mnogo zanimivih lastnosti, ki se opišejo v jeziku matematike, med drugim z razmerjem zlatega reza in Fibonaccijevim zaporedjem.

Sončnica

- Zanimala nas bo razporeditev semen v glavi sončničnega cveta.
- Leonardo da Vinci je bil prvi, ki je opazil, da razporeditev semen v cvetu sončnice določa optimizacija prostora.
- Rezultat je razporeditev semen v parih nasprotno usmerjenih spiral.
- Glava sončničnega cveta raste od znotraj navzven. Nov brstič nastane v okolici središča cveta, kjer je največ prostora.
- Razporeditev semen ima mnogo zanimivih lastnosti, ki se opišejo v jeziku matematike, med drugim z razmerjem zlatega reza in Fibonaccijevim zaporedjem.

Spirale v cvetu sončnice



Verižni ulomki

Pripravimo si matematično orodje, ki ga bomo potrebovali. Začeli bomo z *verižnimi ulomki*.

- Verižni ulomek:

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots],$$

  kjer so a_i koeficienti verižnega ulomka. Koeficient a_0 je celo število, medtem so ko ostali koeficienti a_i, $i > 0$, cela pozitivna števila.
- Začetke uporabe verižnih ulomkov najdemo v Evklidovem algoritmu (300 pr.n.š).
- Evklidov algoritem poišče največji skupni delitelj dveh celih števil.

Verižni ulomki

Pripravimo si matematično orodje, ki ga bomo potrebovali. Začeli bomo z *verižnimi ulomki*.

- Verižni ulomek:

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots],$$

  kjer so a_i koeficienti verižnega ulomka. Koeficient a_0 je celo število, medtem so ko ostali koeficienti a_i, $i > 0$, cela pozitivna števila.

- Začetke uporabe verižnih ulomkov najdemo v Evklidovem algoritmu (300 pr.n.š).
- Evklidov algoritem poišče največji skupni delitelj dveh celih števil.

Verižni ulomki

Pripravimo si matematično orodje, ki ga bomo potrebovali. Začeli bomo z *verižnimi ulomki*.

- Verižni ulomek:

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots],$$

  kjer so a_i koeficienti verižnega ulomka. Koeficient a_0 je celo število, medtem so ko ostali koeficienti a_i, $i > 0$, cela pozitivna števila.
- Začetke uporabe verižnih ulomkov najdemo v Evklidovem algoritmu (300 pr.n.š).
- Evklidov algoritem poišče največji skupni delitelj dveh celih števil.

Verižni ulomki

Pripravimo si matematično orodje, ki ga bomo potrebovali. Začeli bomo z *verižnimi ulomki*.

- Verižni ulomek:

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots],$$

  kjer so a_i koeficienti verižnega ulomka. Koeficient a_0 je celo število, medtem so ko ostali koeficienti a_i, $i > 0$, cela pozitivna števila.
- Začetke uporabe verižnih ulomkov najdemo v Evklidovem algoritmu (300 pr.n.š).
- Evklidov algoritem poišče največji skupni delitelj dveh celih števil.

Primer

Izrazimo racionalno število v obliki verižnega ulomka $\frac{415}{93} = 4.\overline{462365591397849}.$

- $\frac{415}{93} = 4 + \frac{43}{93} = 4 + \frac{1}{\frac{93}{43}}$
- $\frac{93}{43} = 2 + \frac{7}{43} \rightarrow \frac{415}{93} = 4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{\frac{43}{7}}}$
- $\frac{415}{93} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{7}}} = [4; 2, 6, 7]$

Primer

Izrazimo racionalno število v obliki verižnega ulomka $\frac{415}{93} = 4.\overline{462365591397849}$.

- $\dfrac{415}{93} = 4 + \dfrac{43}{93} = 4 + \dfrac{1}{\frac{93}{43}}$
- $\dfrac{93}{43} = 2 + \dfrac{7}{43} \to \dfrac{415}{93} = 4 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\frac{43}{7}}}$
- $\dfrac{415}{93} = 4 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{6 + \dfrac{1}{7}}} = [4; 2, 6, 7]$

Primer

Izrazimo racionalno število v obliki verižnega ulomka $\dfrac{415}{93} = 4.\overline{462365591397849}$.

- $\dfrac{415}{93} = 4 + \dfrac{43}{93} = 4 + \dfrac{1}{\frac{93}{43}}$
- $\dfrac{93}{43} = 2 + \dfrac{7}{43} \rightarrow \dfrac{415}{93} = 4 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{\frac{43}{7}}}$
- $\dfrac{415}{93} = 4 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{6 + \dfrac{1}{7}}} = [4; 2, 6, 7]$

Primer

Izrazimo racionalno število v obliki verižnega ulomka
$\frac{415}{93} = 4.\overline{462365591397849}.$

- $\frac{415}{93} = 4 + \frac{43}{93} = 4 + \frac{1}{\frac{93}{43}}$
- $\frac{93}{43} = 2 + \frac{7}{43} \rightarrow \frac{415}{93} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{43}{7}}}$
- $\frac{415}{93} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7}}} = [4; 2, 6, 7]$

Lastnosti

Predstavitev realnega števila z verižnim ulomkom ima naslednje lastnosti:

1. Predstavitev je končna natanko tedaj, ko je število racionalno.
2. Racionalno število se lahko predstavi na natanko dva načina:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_n + 1].$$

   V matematiki se po dogovoru uporablja krajši drugi način.
3. Predstavitev iracionalnega števila je neskončna in enolična.
4. Iracionalne rešitve kvadratne enačbe s celoštevilčnimi koeficienti $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, lahko predstavimo s periodičnim verižnim ulomkom.

Lastnosti

Predstavitev realnega števila z verižnim ulomkom ima naslednje lastnosti:

1. Predstavitev je končna natanko tedaj, ko je število racionalno.
2. Racionalno število se lahko predstavi na natanko dva načina:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_n + 1].$$

   V matematiki se po dogovoru uporablja krajši drugi način.
3. Predstavitev iracionalnega števila je neskončna in enolična.
4. Iracionalne rešitve kvadratne enačbe s celoštevilčnimi koeficienti $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, lahko predstavimo s periodičnim verižnim ulomkom.

Lastnosti

Predstavitev realnega števila z verižnim ulomkom ima naslednje lastnosti:

1. Predstavitev je končna natanko tedaj, ko je število racionalno.
2. Racionalno število se lahko predstavi na natanko dva načina:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_n + 1].$$

   V matematiki se po dogovoru uporablja krajši drugi način.
3. Predstavitev iracionalnega števila je neskončna in enolična.
4. Iracionalne rešitve kvadratne enačbe s celoštevilčnimi koeficienti $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, lahko predstavimo s periodičnim verižnim ulomkom.

Lastnosti

Predstavitev realnega števila z verižnim ulomkom ima naslednje lastnosti:

1. Predstavitev je končna natanko tedaj, ko je število racionalno.
2. Racionalno število se lahko predstavi na natanko dva načina:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_n + 1].$$

   V matematiki se po dogovoru uporablja krajši drugi način.
3. Predstavitev iracionalnega števila je neskončna in enolična.
4. Iracionalne rešitve kvadratne enačbe s celoštevilčnimi koeficienti $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, lahko predstavimo s periodičnim verižnim ulomkom.

Lastnosti

Predstavitev realnega števila z verižnim ulomkom ima naslednje lastnosti:

1. Predstavitev je končna natanko tedaj, ko je število racionalno.
2. Racionalno število se lahko predstavi na natanko dva načina:

   $$[a_0; a_1, \ldots, a_n, 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_n + 1].$$

   V matematiki se po dogovoru uporablja krajši drugi način.
3. Predstavitev iracionalnega števila je neskončna in enolična.
4. Iracionalne rešitve kvadratne enačbe s celoštevilčnimi koeficienti $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, lahko predstavimo s periodičnim verižnim ulomkom.

Rézi

- Vzemimo, da verižni ulomek $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ prestavlja neko iracionalno število. x.
- Racionalno število $r_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ se imenuje *k-ti rez* verižnega ulomka.
- Rez verižnega ulomka r_k je racionalni približek števila x. Imenujemo ga *k-ti verižni približek*.
- Prvi štirje verižni približki števila $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$:

$$\left\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}\right\}$$

  Približek števila $\pi \approx \frac{22}{7}$ se uporablja v osnovni šoli.
- Relativne napake so:

$$(r_k - \pi)/\pi \approx -0.04508, 0.00040, -0.000027, 0.000000085.$$

Rézi

- Vzemimo, da verižni ulomek $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ prestavlja neko iracionalno število. x.
- Racionalno število $r_k = \dfrac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ se imenuje *k-ti rez* verižnega ulomka.
- Rez verižnega ulomka r_k je racionalni približek števila x. Imenujemo ga *k-ti verižni približek*.
- Prvi štirje verižni približki števila $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$:

$$\left\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}\right\}$$

  Približek števila $\pi \approx \frac{22}{7}$ se uporablja v osnovni šoli.
- Relativne napake so:

$$(r_k - \pi)/\pi \approx -0.04508, 0.00040, -0.000027, 0.000000085.$$

Rézi

- Vzemimo, da verižni ulomek $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ prestavlja neko iracionalno število. x.
- Racionalno število $r_k = \dfrac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ se imenuje *k-ti rez* verižnega ulomka.
- Rez verižnega ulomka r_k je racionalni približek števila x. Imenujemo ga *k-ti verižni približek*.
- Prvi štirje verižni približki števila $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$:

$$\left\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}\right\}$$

  Približek števila $\pi \approx \frac{22}{7}$ se uporablja v osnovni šoli.
- Relativne napake so:

$$(r_k - \pi)/\pi \approx -0.04508, 0.00040, -0.000027, 0.000000085.$$

Rézi

- Vzemimo, da verižni ulomek $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ prestavlja neko iracionalno število. x.
- Racionalno število $r_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ se imenuje *k-ti rez* verižnega ulomka.
- Rez verižnega ulomka r_k je racionalni približek števila x. Imenujemo ga *k-ti verižni približek*.
- Prvi štirje verižni približki števila $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$:

$$\left\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}\right\}$$

Približek števila $\pi \approx \frac{22}{7}$ se uporablja v osnovni šoli.

- Relativne napake so:

$$(r_k - \pi)/\pi \approx -0.04508, 0.00040, -0.000027, 0.000000085.$$

Rézi

- Vzemimo, da verižni ulomek $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ prestavlja neko iracionalno število. x.
- Racionalno število $r_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ se imenuje *k-ti rez* verižnega ulomka.
- Rez verižnega ulomka r_k je racionalni približek števila x. Imenujemo ga *k-ti verižni približek*.
- Prvi štirje verižni približki števila $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$:

$$\left\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}\right\}$$

 Približek števila $\pi \approx \frac{22}{7}$ se uporablja v osnovni šoli.
- Relativne napake so:

$$(r_k - \pi)/\pi \approx -0.04508, 0.00040, -0.000027, 0.000000085.$$

APROKSIMACIJA

Kako dobri so verižni približki? Kakšne so njihove lastnosti?

- Rézi verižnih ulomkov so *okrajšani ulomki*.
- Naj bo $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ k-ti verižni približek realnega števila x. Ta je boljši od vseh racionalnih približkov števila x, katerih imenovalec je manjši ali enak q_k.
- Rézi s sodim indeksom so manjši od števila x, medtem ko so lihi rezi večji od števila x.
- Ocena napake, če zamenjamo število x s k-tim verižnim približkom, je: $|r_k - x| \leq |r_k - r_{k-1}|$,

Aproksimacija

Kako dobri so verižni približki? Kakšne so njihove lastnosti?

- Rézi verižnih ulomkov so *okrajšani ulomki*.
- Naj bo $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ k-ti verižni približek realnega števila x. Ta je boljši od vseh racionalnih približkov števila x, katerih imenovalec je manjši ali enak q_k.
- Rézi s sodim indeksom so manjši od števila x, medtem ko so lihi rezi večji od števila x.
- Ocena napake, če zamenjamo število x s k-tim verižnim približkom, je: $|r_k - x| \leq |r_k - r_{k-1}|$,

Aproksimacija

Kako dobri so verižni približki? Kakšne so njihove lastnosti?

- Rézi verižnih ulomkov so *okrajšani ulomki*.
- Naj bo $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ k-ti verižni približek realnega števila x. Ta je boljši od vseh racionalnih približkov števila x, katerih imenovalec je manjši ali enak q_k.
- Rézi s sodim indeksom so manjši od števila x, medtem ko so lihi rezi večji od števila x.
- Ocena napake, če zamenjamo število x s k-tim verižnim približkom, je: $|r_k - x| \leq |r_k - r_{k-1}|$,

Aproksimacija

Kako dobri so verižni približki? Kakšne so njihove lastnosti?

- Rézi verižnih ulomkov so *okrajšani ulomki*.
- Naj bo $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ k-ti verižni približek realnega števila x. Ta je boljši od vseh racionalnih približkov števila x, katerih imenovalec je manjši ali enak q_k.
- Rézi s sodim indeksom so manjši od števila x, medtem ko so lihi rezi večji od števila x.
- Ocena napake, če zamenjamo število x s k-tim verižnim približkom, je: $|r_k - x| \leq |r_k - r_{k-1}|$,

Aproksimacija

Kako dobri so verižni približki? Kakšne so njihove lastnosti?

- Rézi verižnih ulomkov so *okrajšani ulomki*.
- Naj bo $r_k = \frac{p_k}{q_k}$ k-ti verižni približek realnega števila x. Ta je boljši od vseh racionalnih približkov števila x, katerih imenovalec je manjši ali enak q_k.
- Rézi s sodim indeksom so manjši od števila x, medtem ko so lihi rezi večji od števila x.
- Ocena napake, če zamenjamo število x s k-tim verižnim približkom, je: $|r_k - x| \leq |r_k - r_{k-1}|$,

Konvergenca verižnih približkov

- Realno število x je predstavljeno z verižnim ulomkom $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$. Verižni približki konvergirajo tem hitreje, čim večje so vrednosti koeficientov a_k, $k = 1, 2, \ldots$.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}$$

- Manjša je vrednost koeficienta a_{k+1}, večja je relativna razlika med dvema sosednjima rezoma r_k in r_{k+1}.

Konvergenca verižnih približkov

- Realno število x je predstavljeno z verižnim ulomkom $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$. Verižni približki konvergirajo tem hitreje, čim večje so vrednosti koeficientov a_k, $k = 1, 2, \ldots$.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}$$

- Manjša je vrednost koeficienta a_{k+1}, večja je relativna razlika med dvema sosednjima rezoma r_k in r_{k+1}.

Konvergenca verižnih približkov

- Realno število x je predstavljeno z verižnim ulomkom $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$. Verižni približki konvergirajo tem hitreje, čim večje so vrednosti koeficientov a_k, $k = 1, 2, \ldots$.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}$$

- Manjša je vrednost koeficienta a_{k+1}, večja je relativna razlika med dvema sosednjima rezoma r_k in r_{k+1}.

Konvergenca verižnih približkov

- Realno število x je predstavljeno z verižnim ulomkom $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$. Verižni približki konvergirajo tem hitreje, čim večje so vrednosti koeficientov a_k, $k = 1, 2, \ldots$.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}$$

- Manjša je vrednost koeficienta a_{k+1}, večja je relativna razlika med dvema sosednjima rezoma r_k in r_{k+1}.

'Najbolj iracionalno število' od vseh iracionalnih števil

- Števila, katerega verižni približki konvergirajo najpočasneje, morajo imeti v predstavitvi z verižnim ulomkom, najmanjše možne koeficiente a_k.
- Najmanjši možni koeficienti so enaki 1.
- To število je predstavljeno z verižnim ulomkom

$$x = [1; 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} = 1 + \frac{1}{x},$$

- $x = 1 + \frac{1}{x}$, $x^2 - x - 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- Vrednost $x = \varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ se imenuje zlati rez.

‘Najbolj iracionalno število’ od vseh iracionalnih števil

- Števila, katerega verižni približki konvergirajo najpočasneje, morajo imeti v predstavitvi z verižnim ulomkom, najmanjše možne koeficiente a_k.
- Najmanjši možni koeficienti so enaki 1.
- To število je predstavljeno z verižnim ulomkom

$$x = [1; 1, 1, \dots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}} = 1 + \frac{1}{x},$$

- $x = 1 + \frac{1}{x}, \; x^2 - x - 1 = 0, \; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- Vrednost $x = \varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ se imenuje zlati rez.

'Najbolj iracionalno število' od vseh iracionalnih števil

- Števila, katerega verižni približki konvergirajo najpočasneje, morajo imeti v predstavitvi z verižnim ulomkom, najmanjše možne koeficiente a_k.
- Najmanjši možni koeficienti so enaki 1.
- To število je predstavljeno z verižnim ulomkom
$$x = [1; 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} = 1 + \frac{1}{x},$$
- $x = 1 + \frac{1}{x}$, $x^2 - x - 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- Vrednost $x = \varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ se imenuje zlati rez.

'Najbolj iracionalno število' od vseh iracionalnih števil

- Števila, katerega verižni približki konvergirajo najpočasneje, morajo imeti v predstavitvi z verižnim ulomkom, najmanjše možne koeficiente a_k.
- Najmanjši možni koeficienti so enaki 1.
- To število je predstavljeno z verižnim ulomkom

$$x = [1; 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}} = 1 + \frac{1}{x},$$

- $x = 1 + \frac{1}{x}, \; x^2 - x - 1 = 0, \; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- Vrednost $x = \varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ se imenuje zlati rez.

'Najbolj iracionalno število' od vseh iracionalnih števil

- Števila, katerega verižni približki konvergirajo najpočasneje, morajo imeti v predstavitvi z verižnim ulomkom, najmanjše možne koeficiente a_k.
- Najmanjši možni koeficienti so enaki 1.
- To število je predstavljeno z verižnim ulomkom

$$x = [1; 1, 1, \dots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}} = 1 + \frac{1}{x},$$

- $x = 1 + \frac{1}{x}, \; x^2 - x - 1 = 0, \; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
- Vrednost $x = \varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ se imenuje zlati rez.

Število φ

- $\varphi = 1.6180339887498948482045868343656\ldots$
- $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \to \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$
- $\varphi^2 = \varphi + 1$
- $\frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi} \to \frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$

ŠTEVILO φ

- $\varphi = 1.6180339887498948482045868343656\ldots$
- $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \to \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$
- $\varphi^2 = \varphi + 1$
- $\frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi} \to \frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$

Število φ

- $\varphi = 1.6180339887498948482045868343656\ldots$
- $1 + \dfrac{1}{\varphi} = \varphi \to \dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$
- $\varphi^2 = \varphi + 1$
- $\dfrac{1}{\varphi^2} = 1 - \dfrac{1}{\varphi} \to \dfrac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$

Število φ

- $\varphi = 1.6180339887498948482045868343656\ldots$
- $1 + \dfrac{1}{\varphi} = \varphi \to \dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$
- $\varphi^2 = \varphi + 1$
- $\dfrac{1}{\varphi^2} = 1 - \dfrac{1}{\varphi} \to \dfrac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$

Število φ

- $\varphi = 1.6180339887498948482045868343656\ldots$
- $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \to \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$
- $\varphi^2 = \varphi + 1$
- $\frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi} \to \frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$

Figlio di Bonacci

Fibonaccijevo zaporedje se začne s členoma $a_0 = 1$ in $a_1 = 1$, od tod naprej je vsak naslednji člen vsota dveh pred njim.
$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\}$

- Leonardo Pisano (Leonardo de Pisa) (1170-1250) alias Fibonacci, je bil prvi, ki je v zahodnem svetu omenil to zaporedje.
- V obdobju, ki ga je preživel s svojim očetom v Alžiriji, je imel privatnega učitelja arabca, ki ga je podučil o osnovah arabske aritmetike.
- Ko se je vrnil v Evropo, je vpeljal indo-arabski mestni decimalni zapis števil.
- V tem času se je ta sistem uporabljal že štiri stoletja na Evropskih tleh, v arabski Andaluziji v današnji Španiji.

Figlio di Bonacci

Fibonaccijevo zaporedje se začne s členoma $a_0 = 1$ in $a_1 = 1$, od tod naprej je vsak naslednji člen vsota dveh pred njim.
$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\}$

- Leonardo Pisano (Leonardo de Pisa) (1170-1250) alias Fibonacci, je bil prvi, ki je v zahodnem svetu omenil to zaporedje.
- V obdobju, ki ga je preživel s svojim očetom v Alžiriji, je imel privatnega učitelja arabca, ki ga je podučil o osnovah arabske aritmetike.
- Ko se je vrnil v Evropo, je vpeljal indo-arabski mestni decimalni zapis števil.
- V tem času se je ta sistem uporabljal že štiri stoletja na Evropskih tleh, v arabski Andaluziji v današnji Španiji.

Figlio di Bonacci

Fibonaccijevo zaporedje se začne s členoma $a_0 = 1$ in $a_1 = 1$, od tod naprej je vsak naslednji člen vsota dveh pred njim.
$\{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \dots\}$

- Leonardo Pisano (Leonardo de Pisa) (1170-1250) alias Fibonacci, je bil prvi, ki je v zahodnem svetu omenil to zaporedje.
- V obdobju, ki ga je preživel s svojim očetom v Alžiriji, je imel privatnega učitelja arabca, ki ga je podučil o osnovah arabske aritmetike.
- Ko se je vrnil v Evropo, je vpeljal indo-arabski mestni decimalni zapis števil.
- V tem času se je ta sistem uporabljal že štiri stoletja na Evropskih tleh, v arabski Andaluziji v današnji Španiji.

Figlio di Bonacci

Fibonaccijevo zaporedje se začne s členoma $a_0 = 1$ in $a_1 = 1$, od tod naprej je vsak naslednji člen vsota dveh pred njim.
$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\}$

- Leonardo Pisano (Leonardo de Pisa) (1170-1250) alias Fibonacci, je bil prvi, ki je v zahodnem svetu omenil to zaporedje.
- V obdobju, ki ga je preživel s svojim očetom v Alžiriji, je imel privatnega učitelja arabca, ki ga je podučil o osnovah arabske aritmetike.
- Ko se je vrnil v Evropo, je vpeljal indo-arabski mestni decimalni zapis števil.
- V tem času se je ta sistem uporabljal že štiri stoletja na Evropskih tleh, v arabski Andaluziji v današnji Španiji.

Figlio di Bonacci

Fibonaccijevo zaporedje se začne s členoma $a_0 = 1$ in $a_1 = 1$, od tod naprej je vsak naslednji člen vsota dveh pred njim.
$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\}$

- Leonardo Pisano (Leonardo de Pisa) (1170-1250) alias Fibonacci, je bil prvi, ki je v zahodnem svetu omenil to zaporedje.
- V obdobju, ki ga je preživel s svojim očetom v Alžiriji, je imel privatnega učitelja arabca, ki ga je podučil o osnovah arabske aritmetike.
- Ko se je vrnil v Evropo, je vpeljal indo-arabski mestni decimalni zapis števil.
- V tem času se je ta sistem uporabljal že štiri stoletja na Evropskih tleh, v arabski Andaluziji v današnji Španiji.

Fibonaccijevi zajci

Fibonaccijevo zaporedje dobimo je rešitev problema rasti (nerealne) populacije zajcev. Za rast populacije naj veljajo naslednja pravila:

- Na začetku imamo par zajčjih mladičkov, samca in samičko.
- Zajci se rojevajo v parih, eden je samček drugi samička.
- Rojeni parček potrebuje en mesec, da spolno dozori.
- Vsak mesec odrasli par skoti nov par mladičkov.
- Samička nosi en mesec.

Fibonaccijevi zajci

Fibonaccijevo zaporedje dobimo je rešitev problema rasti (nerealne) populacije zajcev. Za rast populacije naj veljajo naslednja pravila:

- Na začetku imamo par zajčjih mladičkov, samca in samičko.
- Zajci se rojevajo v parih, eden je samček drugi samička.
- Rojeni parček potrebuje en mesec, da spolno dozori.
- Vsak mesec odrasli par skoti nov par mladičkov.
- Samička nosi en mesec.

Fibonaccijevi zajci

Fibonaccijevo zaporedje dobimo je rešitev problema rasti (nerealne) populacije zajcev. Za rast populacije naj veljajo naslednja pravila:

- Na začetku imamo par zajčjih mladičkov, samca in samičko.
- Zajci se rojevajo v parih, eden je samček drugi samička.
- Rojeni parček potrebuje en mesec, da spolno dozori.
- Vsak mesec odrasli par skoti nov par mladičkov.
- Samička nosi en mesec.

Fibonaccijevi zajci

Fibonaccijevo zaporedje dobimo je rešitev problema rasti (nerealne) populacije zajcev. Za rast populacije naj veljajo naslednja pravila:

- Na začetku imamo par zajčjih mladičkov, samca in samičko.
- Zajci se rojevajo v parih, eden je samček drugi samička.
- Rojeni parček potrebuje en mesec, da spolno dozori.
- Vsak mesec odrasli par skoti nov par mladičkov.
- Samička nosi en mesec.

Fibonaccijevi zajci

Fibonaccijevo zaporedje dobimo je rešitev problema rasti (nerealne) populacije zajcev. Za rast populacije naj veljajo naslednja pravila:

- Na začetku imamo par zajčjih mladičkov, samca in samičko.
- Zajci se rojevajo v parih, eden je samček drugi samička.
- Rojeni parček potrebuje en mesec, da spolno dozori.
- Vsak mesec odrasli par skoti nov par mladičkov.
- Samička nosi en mesec.

Fibonaccijevi zajci

Fibonaccijevo zaporedje dobimo je rešitev problema rasti (nerealne) populacije zajcev. Za rast populacije naj veljajo naslednja pravila:

- Na začetku imamo par zajčjih mladičkov, samca in samičko.
- Zajci se rojevajo v parih, eden je samček drugi samička.
- Rojeni parček potrebuje en mesec, da spolno dozori.
- Vsak mesec odrasli par skoti nov par mladičkov.
- Samička nosi en mesec.

Fibonaccijevi zajci

- Na začetku prvega meseca imamo par mladičkov, (število parov = 1).
- V začetku drugega meseca par spolno dozori in se križa, (število parov = 1).
- V začetku tretjega meseca se skoti parček mladičkov, (število parov = 2).
- V začetku četrtega ima prvi par mladičke, medtem ko drugi par spolno dozori in se križa, (število parov = 3).
- V začetku petega meseca imata mladičke prvi in drugi par, tretji par se križa. Tako smo pridobili dva nova para, (število parov = 5).

Fibonaccijevi zajci

- Na začetku prvega meseca imamo par mladičkov, (število parov = 1).
- V začetku drugega meseca par spolno dozori in se križa, (število parov = 1).
- V začetku tretjega meseca se skoti parček mladičkov, (število parov = 2).
- V začetku četrtega ima prvi par mladičke, medtem ko drugi par spolno dozori in se križa, (število parov = 3).
- V začetku petega meseca imata mladičke prvi in drugi par, tretji par se križa. Tako smo pridobili dva nova para, (število parov = 5).

Fibonaccijevi zajci

- Na začetku prvega meseca imamo par mladičkov, (število parov = 1).
- V začetku drugega meseca par spolno dozori in se križa, (število parov = 1).
- V začetku tretjega meseca se skoti parček mladičkov, (število parov = 2).
- V začetku četrtega ima prvi par mladičke, medtem ko drugi par spolno dozori in se križa, (število parov = 3).
- V začetku petega meseca imata mladičke prvi in drugi par, tretji par se križa. Tako smo pridobili dva nova para, (število parov = 5).

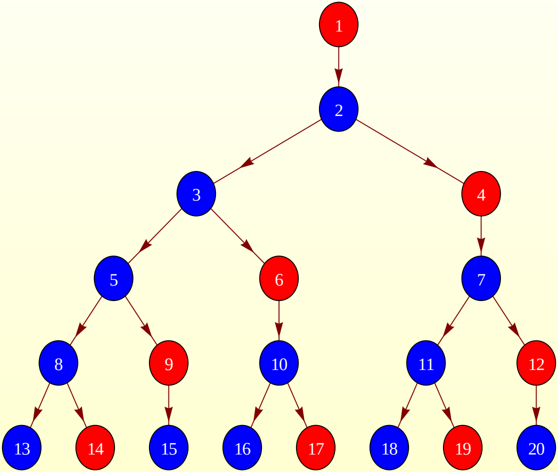
Fibonaccijevi zajci

- Na začetku prvega meseca imamo par mladičkov,
  (število parov $= 1$).
- V začetku drugega meseca par spolno dozori in se križa,
  (število parov $= 1$).
- V začetku tretjega meseca se skoti parček mladičkov,
  (število parov $= 2$).
- V začetku četrtega ima prvi par mladičke, medtem ko drugi par spolno dozori in se križa,
  (število parov $= 3$).
- V začetku petega meseca imata mladičke prvi in drugi par, tretji par se križa. Tako smo pridobili dva nova para,
  (število parov $= 5$).

Fibonaccijevi zajci

- Na začetku prvega meseca imamo par mladičkov, (število parov = 1).
- V začetku drugega meseca par spolno dozori in se križa, (število parov = 1).
- V začetku tretjega meseca se skoti parček mladičkov, (število parov = 2).
- V začetku četrtega ima prvi par mladičke, medtem ko drugi par spolno dozori in se križa, (število parov = 3).
- V začetku petega meseca imata mladičke prvi in drugi par, tretji par se križa. Tako smo pridobili dva nova para, (število parov = 5).

Fibonaccijevi zajci



Fibonaccijevo zaporedje

- Nemški matematik in astronom Johannes Kepler (1571-1630) je zapisal induktivno definicijo Fibonaccijevega zaporedja.

$$F(1) = 1, \quad F(2) = 1, \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1) \tag{1}$$

- Včasih želimo začeti zaporedje z 0. $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1) \tag{2}$$

- Velja naslednja zveza:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

Fibonaccijevo zaporedje

- Nemški matematik in astronom Johannes Kepler (1571-1630) je zapisal induktivno definicijo Fibonaccijevega zaporedja.

$$F(1) = 1, \quad F(2) = 1, \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1) \qquad (1)$$

- Včasih želimo začeti zaporedje z 0. $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1) \qquad (2)$$

- Velja naslednja zveza:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

Fibonaccijevo zaporedje

- Nemški matematik in astronom Johannes Kepler (1571-1630) je zapisal induktivno definicijo Fibonaccijevega zaporedja.

$$F(1) = 1, \quad F(2) = 1, \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1) \tag{1}$$

- Včasih želimo začeti zaporedje z 0. $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1) \tag{2}$$

- Velja naslednja zveza:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

Fibonaccijevo zaporedje

- Nemški matematik in astronom Johannes Kepler (1571-1630) je zapisal induktivno definicijo Fibonaccijevega zaporedja.

$$F(1) = 1, \quad F(2) = 1, \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1) \tag{1}$$

- Včasih želimo začeti zaporedje z 0. $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad F(n) = F(n-2) + F(n-1) \tag{2}$$

- Velja naslednja zveza:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F(n-1) & F(n) \\ F(n) & F(n+1) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

Lastnosti

Fibonaccijevo zaporedje vsebuje pravi zaklad zvez med členi.
V nadaljevanju si bomo pogledali nekatere od njih: (3)

$$F(n)^2 = F(n+1)F(n-2) + F(n-1)^2, \tag{4}$$

$$F(n)^2 = F(n)F(n-1) + F(n-1)^2 + (-1)^{n+1}. \tag{5}$$

- Kvocienti

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{F(n) + F(n-1)}{F(n)} = 1 + \frac{1}{\frac{F(n)}{F(n-1)}} \tag{6}$$

so verižni približki zlatega reza, zato je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi. \tag{7}$$

Lastnosti

Fibonaccijevo zaporedje vsebuje pravi zaklad zvez med členi. V nadaljevanju si bomo pogledali nekatere od njih: (3)

$$F(n)^2 = F(n+1)F(n-2) + F(n-1)^2, \tag{4}$$

$$F(n)^2 = F(n)F(n-1) + F(n-1)^2 + (-1)^{n+1}. \tag{5}$$

- Kvocienti

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{F(n)+F(n-1)}{F(n)} = 1 + \frac{1}{\frac{F(n)}{F(n-1)}} \tag{6}$$

so verižni približki zlatega reza, zato je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi. \tag{7}$$

Lastnosti

Fibonaccijevo zaporedje vsebuje pravi zaklad zvez med členi. V nadaljevanju si bomo pogledali nekatere od njih: (3)

$$F(n)^2 = F(n+1)F(n-2) + F(n-1)^2, \tag{4}$$

$$F(n)^2 = F(n)F(n-1) + F(n-1)^2 + (-1)^{n+1}. \tag{5}$$

- Kvocienti

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{F(n)+F(n-1)}{F(n)} = 1 + \frac{1}{\frac{F(n)}{F(n-1)}} \tag{6}$$

so verižni približki zlatega reza, zato je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi. \tag{7}$$

Dva izreka

1. *Naj bo* $x \in [0,1]$ *in* $n \in \mathbb{N}$. (23).
   - *Točke* $\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots, \{nx\}$ *razdelijo interval* $[0,1]$ *na* $n+1$ *podintervalov, ki so največ treh različnih velikosti.* ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$).
   - *Naslednja točka* $\{(n+1)x\}$ *pade v enega od največjih podintervalov.*
2. *Beatty: Naj bo* $1/x + 1/y = 1$, *kjer sta* x *in* y *dve iracionalni števili. Vsako naravno število je vsebovano natanko enkrat v enem ali v drugem zaporedju definiranim z*

$$\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor, \lfloor 3x \rfloor \ldots \quad \text{in} \quad \lfloor y \rfloor, \lfloor 2y \rfloor, \lfloor 3y \rfloor, \ldots$$

Dva izreka

1. *Naj bo $x \in [0,1]$ in $n \in \mathbb{N}$.* (23).
    - *Točke $\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots, \{nx\}$ razdelijo interval $[0,1]$ na $n+1$ podintervalov, ki so največ treh različnih velikosti: ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$).*
    - Naslednja točka $\{(n+1)x\}$ pade v enega od največjih podintervalov.
2. *Beatty: Naj bo $1/x + 1/y = 1$, kjer sta x in y dve iracionalni števili. Vsako naravno število je vsebovano natanko enkrat v enem ali v drugem zaporedju definiranim z*

$$\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor, \lfloor 3x \rfloor \ldots \quad \textit{in} \quad \lfloor y \rfloor, \lfloor 2y \rfloor, \lfloor 3y \rfloor, \ldots$$

Dva izreka

1. *Naj bo* $x \in [0,1]$ *in* $n \in \mathbb{N}$. (23).
   - *Točke* $\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots, \{nx\}$ *razdelijo interval* $[0,1]$ *na* $n+1$ *podintervalov, ki so največ treh različnih velikosti:* $(\{x\} = x - \lfloor x \rfloor)$.
   - Naslednja točka $\{(n+1)x\}$ pade v enega od največjih podintervalov.
2. *Beatty: Naj bo* $1/x + 1/y = 1$, *kjer sta* x *in* y *dve iracionalni števili. Vsako naravno število je vsebovano natanko enkrat v enem ali v drugem zaporedju definiranim z*

$$\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor, \lfloor 3x \rfloor \ldots \quad \textit{in} \quad \lfloor y \rfloor, \lfloor 2y \rfloor, \lfloor 3y \rfloor, \ldots$$

Dva izreka

1. *Naj bo $x \in [0,1]$ in $n \in \mathbb{N}$.* (23).
   - *Točke* $\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots, \{nx\}$ *razdelijo interval* $[0,1]$ *na* $n+1$ *podintervalov, ki so največ treh različnih velikosti:* ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$).
   - Naslednja točka $\{(n+1)x\}$ pade v enega od največjih podintervalov.
2. *Beatty: Naj bo* $1/x + 1/y = 1$, *kjer sta* x *in* y *dve iracionalni števili. Vsako naravno število je vsebovano natanko enkrat v enem ali v drugem zaporedju definiranim z*

$$\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor, \lfloor 3x \rfloor \ldots \quad \textit{in} \quad \lfloor y \rfloor, \lfloor 2y \rfloor, \lfloor 3y \rfloor, \ldots$$

Dva izreka

1. *Naj bo* $x \in [0,1]$ *in* $n \in \mathbb{N}$. (23).
   - *Točke* $\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots, \{nx\}$ *razdelijo interval* $[0,1]$ *na* $n+1$ *podintervalov, ki so največ treh različnih velikosti: (*$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$*).*
   - Naslednja točka $\{(n+1)x\}$ pade v enega od največjih podintervalov.
2. *Beatty: Naj bo* $1/x + 1/y = 1$, *kjer sta* x *in* y *dve iracionalni števili. Vsako naravno število je vsebovano natanko enkrat v enem ali v drugem zaporedju definiranim z*

$$\lfloor x \rfloor, \lfloor 2x \rfloor, \lfloor 3x \rfloor \ldots \quad \textit{in} \quad \lfloor y \rfloor, \lfloor 2y \rfloor, \lfloor 3y \rfloor, \ldots$$

Fibonaccijeva beseda

Fibonaccijeva beseda je niz znakov abecede z dvema znakoma, ki je sestavljena po pravilu, podobnem pravilu za tvorbo Fibonaccijevega zaporedja, le da števila nadomestimo z nizi znakov, vsoto pa z konkatenacijo (stikanjem) nizov. Naj spregovori naslednji primer.

```
{a}
{b}
{b,a}
{b,a,b}
{b,a,b,b,a}
{b,a,b,b,a,b,a,b}
{b,a,b,b,a,b,a,b,b,a,b,b,a}
```

Fibonaccijeve besede dobimo tudi tako, da začnemo z nizoma a in b in zaporedoma nadomeščamo $a \rightarrow b$ in $b \rightarrow b, a$.

Fibonaccijeva beseda

Fibonaccijeva beseda je niz znakov abecede z dvema znakoma, ki je sestavljena po pravilu, podobnem pravilu za tvorbo Fibonaccijevega zaporedja, le da števila nadomestimo z nizi znakov, vsoto pa z konkatenacijo (stikanjem) nizov. Naj spregovori naslednji primer.

```
{a}
{b}
{b,a}
{b,a,b}
{b,a,b,b,a}
{b,a,b,b,a,b,a,b}
{b,a,b,b,a,b,a,b,b,a,b,b,a}
```

Fibonaccijeve besede dobimo tudi tako, da začnemo z nizoma a in b in zaporedoma nadomeščamo $a \rightarrow b$ in $b \rightarrow b, a$.

Fibonaccijeva beseda

Fibonaccijeva beseda je niz znakov abecede z dvema znakoma, ki je sestavljena po pravilu, podobnem pravilu za tvorbo Fibonaccijevega zaporedja, le da števila nadomestimo z nizi znakov, vsoto pa z konkatenacijo (stikanjem) nizov. Naj spregovori naslednji primer.

```
{a}
{b}
{b,a}
{b,a,b}
{b,a,b,b,a}
{b,a,b,b,a,b,a,b}
{b,a,b,b,a,b,a,b,b,a,b,b,a}
```

Fibonaccijeve besede dobimo tudi tako, da začnemo z nizoma a in b in zaporedoma nadomeščamo $a \to b$ in $b \to b, a$.

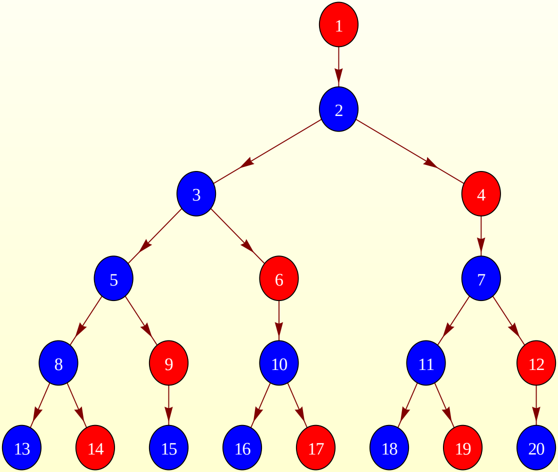
Fibonaccijeva beseda

Fibonaccijeva beseda je niz znakov abecede z dvema znakoma, ki je sestavljena po pravilu, podobnem pravilu za tvorbo Fibonaccijevega zaporedja, le da števila nadomestimo z nizi znakov, vsoto pa z konkatenacijo (stikanjem) nizov. Naj spregovori naslednji primer.

```
{a}
{b}
{b,a}
{b,a,b}
{b,a,b,b,a}
{b,a,b,b,a,b,a,b}
{b,a,b,b,a,b,a,b,b,a,b,b,a}
```

Fibonaccijeve besede dobimo tudi tako, da začnemo z nizoma a in b in zaporedoma nadomeščamo $a \to b$ in $b \to b, a$.

Fibonaccijevi zajci



'Najbolj iracionalno število'

V izreku (1) izberemo:

1. $x = \theta = \frac{2\pi}{\varphi^2}$,
2. interval je $[0, 2\pi]$,
3. število n je vrednost člena v Fibonaccijevem zaporedju.

Označimo točke na krožnici enote: $r = 1$, s polarnim kotom $k\theta$, $k = 1, \ldots, n$.

‘Najbolj iracionalno število’

V izreku (1) izberemo:

1. $x = \theta = \frac{2\pi}{\varphi^2}$,
2. interval je $[0, 2\pi]$,
3. število n je vrednost člena v Fibonaccijevem zaporedju.

Označimo točke na krožnici enote: $r = 1$, s polarnim kotom $k\theta$, $k = 1, \ldots, n$.

'Najbolj iracionalno število'

V izreku (1) izberemo:

1. $x = \theta = \frac{2\pi}{\varphi^2}$,
2. interval je $[0, 2\pi]$,
3. število n je vrednost člena v Fibonaccijevem zaporedju.

Označimo točke na krožnici enote: $r = 1$, s polarnim kotom $k\theta$, $k = 1, \ldots, n$.

'Najbolj iracionalno število'

V izreku (1) izberemo:

1. $x = \theta = \frac{2\pi}{\varphi^2}$,
2. interval je $[0, 2\pi]$,
3. število n je vrednost člena v Fibonaccijevem zaporedju.

Označimo točke na krožnici enote: $r = 1$, s polarnim kotom $k\theta$, $k = 1, \ldots, n$.

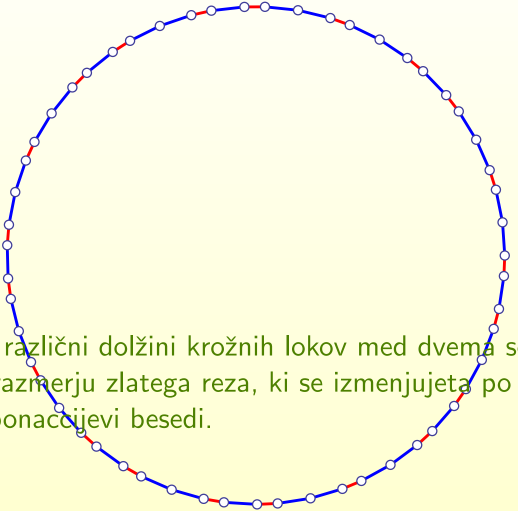
‘Najbolj iracionalno število’

V izreku (1) izberemo:

1. $x = \theta = \frac{2\pi}{\varphi^2}$,
2. interval je $[0, 2\pi]$,
3. število n je vrednost člena v Fibonaccijevem zaporedju.

Označimo točke na krožnici enote: $r = 1$, s polarnim kotom $k\theta$, $k = 1, \ldots, n$.

'Najbolj iracionalno število'



Dobimo dve različni dolžini krožnih lokov med dvema sosednjima točkama, v razmerju zlatega reza, ki se izmenjujeta po vzorcu znakov v Fibonaccijevi besedi.

Beattyjevi pari

V drugem izreku izberemo (2): $x = \varphi$, $y = \varphi^2$.
Dobimo dve zaporedji , $\{\lfloor nx \rfloor\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{\lfloor ny \rfloor\}_{n\in\mathbb{N}}$

```
1, 3, 4,  6,  8,  9, 11, 12, 14, 16, ...
2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, ...
```

Razlika dveh sosednjih členov v prvem zaporedju je 2 ali 1, v drugem pa 3 ali 2.
Razliki se izmenjujeta v vzorcu znakov Fibonaccijeve besede.
Pari števil $\{1, 2\}$, $\{3, 5\}$, etc., se imenujejo Beattyjevi pari.

Wythoffova igra

- Imamo dva stolpca kovancev in dva igralca.
- Igralca izmenoma jemljeta kovance iz stolpcev.
- Vsak igralec ima na razpolago eno od dveh možnosti:
  1. lahko vzame poljubno število kovancev iz enega od stolpcev ali
  2. vzame enako število kovancev iz enega in drugega stolpca.
- Igra se konča, ko zmanjka kovancev.
- Zmaga tisti, ki zadnji pobere kovance.

Vedno zmaga tisti, ki jemlje kovance tako, da njihovo število v stolpcih, ostaja enako Beattyjevem paru.

Ko je število kovancev v stolpcih enako Beattyjevem paru, jih ni mogoče pobrati kako, da bi tako tudi ostalo. V vseh drugih primerih, pa je to mogoče.

Wythoffova igra

- Imamo dva stolpca kovancev in dva igralca.
- Igralca izmenoma jemljeta kovance iz stolpcev.
- Vsak igralec ima na razpolago eno od dveh možnosti:
  1. lahko vzame poljubno število kovancev iz enega od stolpcev ali
  2. vzame enako število kovancev iz enega in drugega stolpca.
- Igra se konča, ko zmanjka kovancev.
- Zmaga tisti, ki zadnji pobere kovance.

Vedno zmaga tisti, ki jemlje kovance tako, da njihovo število v stolpcih, ostaja enako Beattyjevem paru.

Ko je število kovancev v stolpcih enako Beattyjevem paru, jih ni mogoče pobrati kako, da bi tako tudi ostalo. V vseh drugih primerih, pa je to mogoče.

Wythoffova igra

- Imamo dva stolpca kovancev in dva igralca.
- Igralca izmenoma jemljeta kovance iz stolpcev.
- Vsak igralec ima na razpolago eno od dveh možnosti:
  1. lahko vzame poljubno število kovancev iz enega od stolpcev ali
  2. vzame enako število kovancev iz enega in drugega stolpca.
- Igra se konča, ko zmanjka kovancev.
- Zmaga tisti, ki zadnji pobere kovance.

Vedno zmaga tisti, ki jemlje kovance tako, da njihovo število v stolpcih, ostaja enako Beattyjevem paru.

Ko je število kovancev v stolpcih enako Beattyjevem paru, jih ni mogoče pobrati kako, da bi tako tudi ostalo. V vseh drugih primerih, pa je to mogoče.

Wythoffova igra

- Imamo dva stolpca kovancev in dva igralca.
- Igralca izmenoma jemljeta kovance iz stolpcev.
- Vsak igralec ima na razpolago eno od dveh možnosti:
  1. lahko vzame poljubno število kovancev iz enega od stolpcev ali
  2. vzame enako število kovancev iz enega in drugega stolpca.
- Igra se konča, ko zmanjka kovancev.
- Zmaga tisti, ki zadnji pobere kovance.

Vedno zmaga tisti, ki jemlje kovance tako, da njihovo število v stolpcih, ostaja enako Beattyjevem paru.

Ko je število kovancev v stolpcih enako Beattyjevem paru, jih ni mogoče pobrati kako, da bi tako tudi ostalo. V vseh drugih primerih, pa je to mogoče.

Wythoffova igra

- Imamo dva stolpca kovancev in dva igralca.
- Igralca izmenoma jemljeta kovance iz stolpcev.
- Vsak igralec ima na razpolago eno od dveh možnosti:
  1. lahko vzame poljubno število kovancev iz enega od stolpcev ali
  2. vzame enako število kovancev iz enega in drugega stolpca.
- Igra se konča, ko zmanjka kovancev.
- Zmaga tisti, ki zadnji pobere kovance.

Vedno zmaga tisti, ki jemlje kovance tako, da njihovo število v stolpcih, ostaja enako Beattyjevem paru.

Ko je število kovancev v stolpcih enako Beattyjevem paru, jih ni mogoče pobrati kako, da bi tako tudi ostalo. V vseh drugih primerih, pa je to mogoče.

Wythoffova igra

- Imamo dva stolpca kovancev in dva igralca.
- Igralca izmenoma jemljeta kovance iz stolpcev.
- Vsak igralec ima na razpolago eno od dveh možnosti:
  1. lahko vzame poljubno število kovancev iz enega od stolpcev ali
  2. vzame enako število kovancev iz enega in drugega stolpca.
- Igra se konča, ko zmanjka kovancev.
- Zmaga tisti, ki zadnji pobere kovance.

Vedno zmaga tisti, ki jemlje kovance tako, da njihovo število v stolpcih, ostaja enako Beattyjevem paru.

Ko je število kovancev v stolpcih enako Beattyjevem paru, jih ni mogoče pobrati kako, da bi tako tudi ostalo. V vseh drugih primerih, pa je to mogoče.

Wythoffova igra

- Imamo dva stolpca kovancev in dva igralca.
- Igralca izmenoma jemljeta kovance iz stolpcev.
- Vsak igralec ima na razpolago eno od dveh možnosti:
  1. lahko vzame poljubno število kovancev iz enega od stolpcev ali
  2. vzame enako število kovancev iz enega in drugega stolpca.
- Igra se konča, ko zmanjka kovancev.
- Zmaga tisti, ki zadnji pobere kovance.

Vedno zmaga tisti, ki jemlje kovance tako, da njihovo število v stolpcih, ostaja enako Beattyjevem paru.

Ko je število kovancev v stolpcih enako Beattyjevem paru, jih ni mogoče pobrati kako, da bi tako tudi ostalo. V vseh drugih primerih, pa je to mogoče.

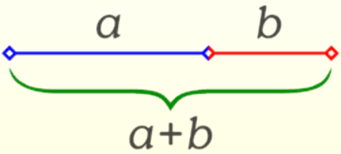
Wythoffova igra

- Imamo dva stolpca kovancev in dva igralca.
- Igralca izmenoma jemljeta kovance iz stolpcev.
- Vsak igralec ima na razpolago eno od dveh možnosti:
  1. lahko vzame poljubno število kovancev iz enega od stolpcev ali
  2. vzame enako število kovancev iz enega in drugega stolpca.
- Igra se konča, ko zmanjka kovancev.
- Zmaga tisti, ki zadnji pobere kovance.

Vedno zmaga tisti, ki jemlje kovance tako, da njihovo število v stolpcih, ostaja enako Beattyjevem paru.

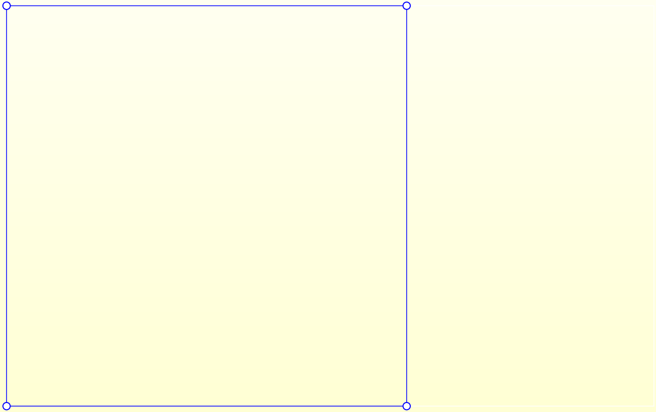
Ko je število kovancev v stolpcih enako Beattyjevem paru, jih ni mogoče pobrati kako, da bi tako tudi ostalo. V vseh drugih primerih, pa je to mogoče.

Geometrična definicija

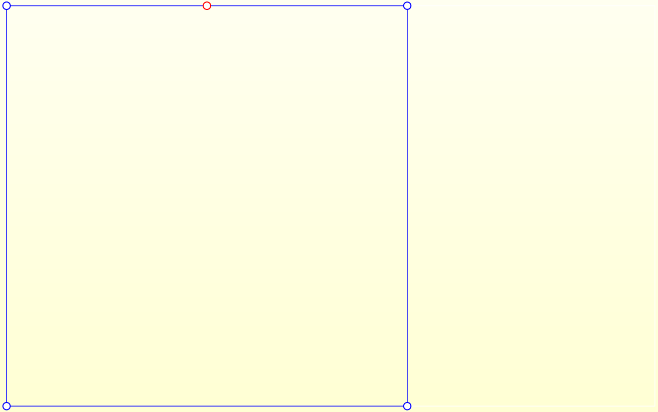


Točka deli daljico na dva dela v razmerju zlatega reza, če je razmerje med skupno dolžino daljice in dolžino večjega dela, enako razmerju med večjim in manjšim delom daljice.
Z drugimo besedami, če točka razdeli daljico na dva dela z dolžinama a *in* b*, kjer je* $a > b$ *in* $(a + b)/a = a/b$*, potem točka deli daljico v razmerju zlatega reza.*

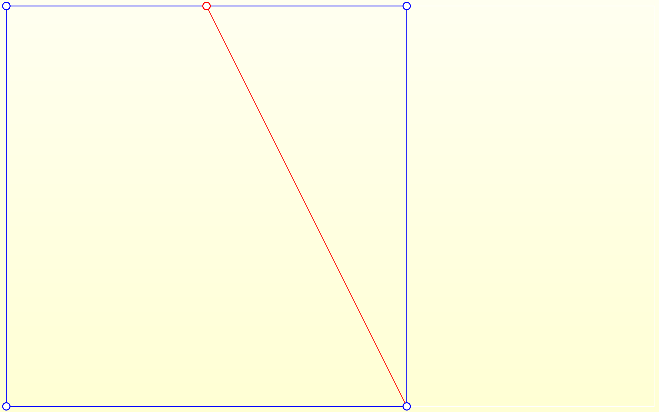
Zlati pravokotnik



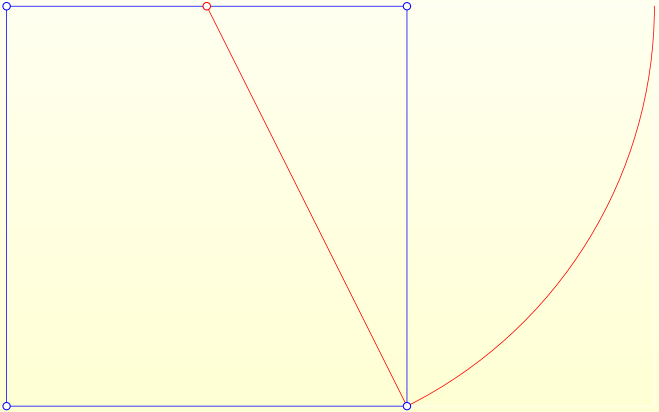
Zlati pravokotnik



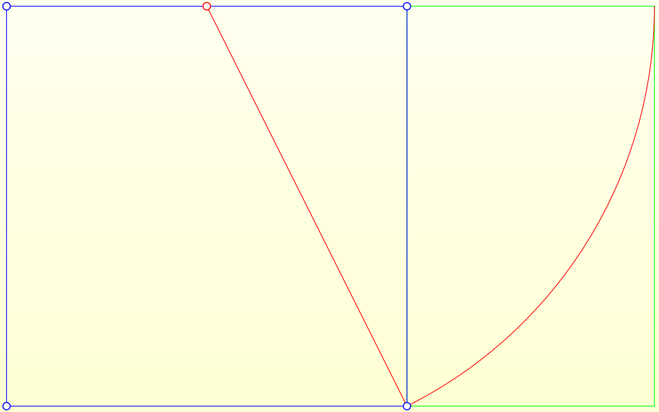
Zlati pravokotnik



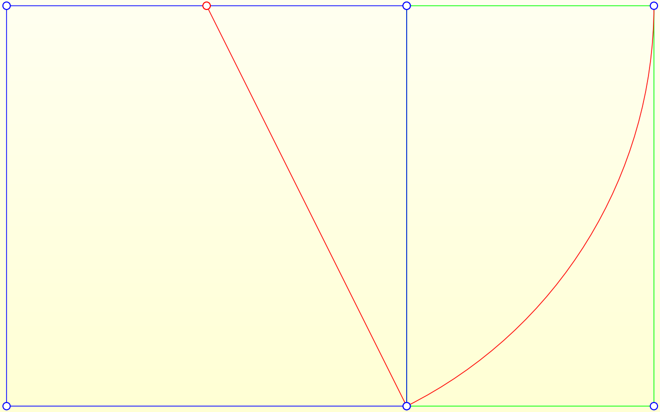
Zlati pravokotnik



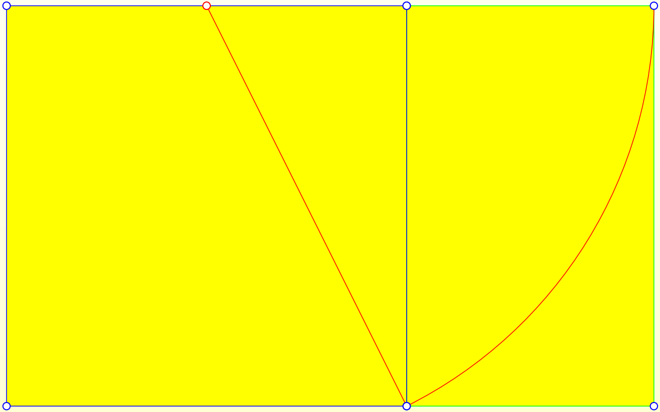
Zlati pravokotnik



Zlati pravokotnik



Zlati pravokotnik



Zgodovina

- Prvi, ki je omenjal zlati rez in ga je zapisal v matematični obliki, je bil Evklid (c. 300–265 p.n.š).
- V knjigi Mysterium Cosmographicum (Kozmološki misteriji) Johannes Kepler (1571–1630), med drugim omenja zlati rez: *"V geometriji najdemo dva velika zaklada: eden je Pitagorjev izrek, drugi je razmerje zlatega reza"*.
- Keplerjev trikotnik povezuje oboje. To je pravokotni trikotnik z razmerjem stranic $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$.

Zgodovina

- Prvi, ki je omenjal zlati rez in ga je zapisal v matematični obliki, je bil Evklid (c. 300–265 p.n.š).
- V knjigi Mysterium Cosmographicum (Kozmološki misteriji) Johannes Kepler (1571–1630), med drugim omenja zlati rez: *"V geometriji najdemo dva velika zaklada: eden je Pitagorjev izrek, drugi je razmerje zlatega reza"*.
- Keplerjev trikotnik povezuje oboje. To je pravokotni trikotnik z razmerjem stranic $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$.

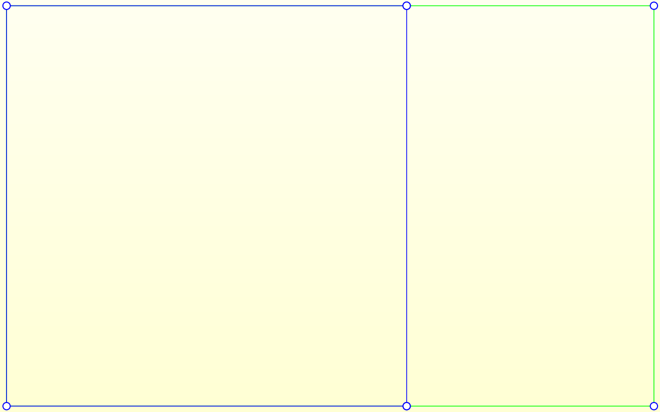
ZGODOVINA

- Prvi, ki je omenjal zlati rez in ga je zapisal v matematični obliki, je bil Evklid (c. 300–265 p.n.š).
- V knjigi Mysterium Cosmographicum (Kozmološki misteriji) Johannes Kepler (1571–1630), med drugim omenja zlati rez: *"V geometriji najdemo dva velika zaklada: eden je Pitagorjev izrek, drugi je razmerje zlatega reza"*.
- Keplerjev trikotnik povezuje oboje. To je pravokotni trikotnik z razmerjem stranic $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$.

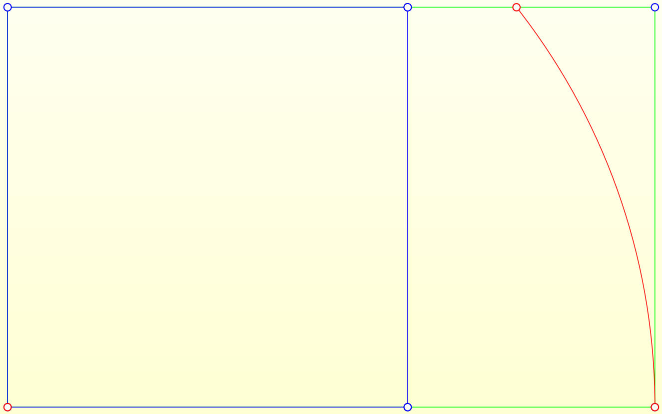
Zgodovina

- Prvi, ki je omenjal zlati rez in ga je zapisal v matematični obliki, je bil Evklid (c. 300–265 p.n.š).
- V knjigi Mysterium Cosmographicum (Kozmološki misteriji) Johannes Kepler (1571–1630), med drugim omenja zlati rez: *"V geometriji najdemo dva velika zaklada: eden je Pitagorjev izrek, drugi je razmerje zlatega reza".*
- Keplerjev trikotnik povezuje oboje. To je pravokotni trikotnik z razmerjem stranic $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$.

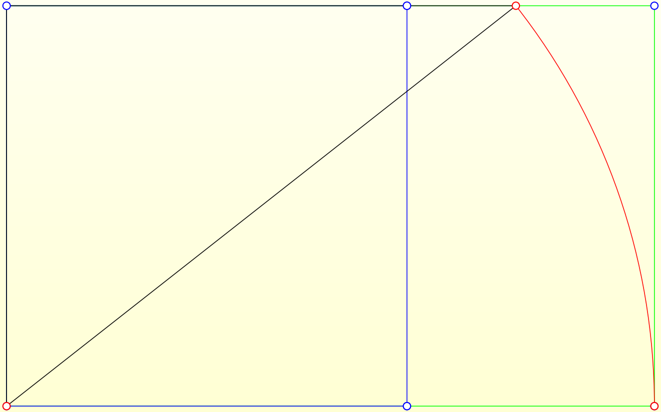
Keplerjev trikotnik



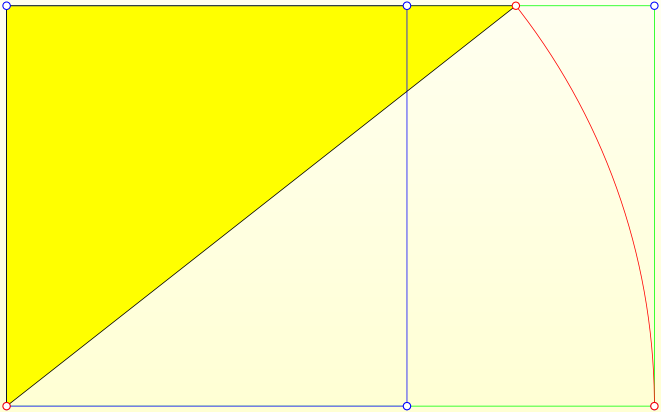
Keplerjev trikotnik



Keplerjev trikotnik

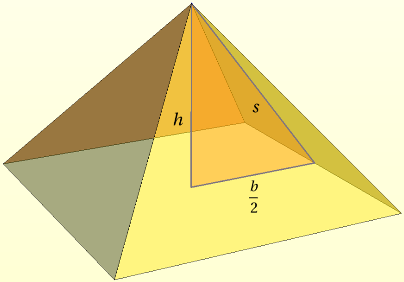


Keplerjev trikotnik



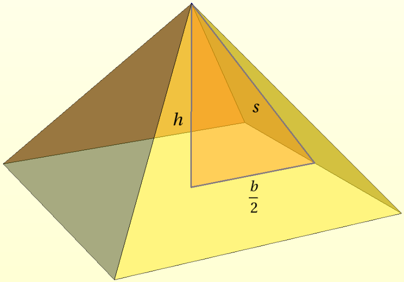
Keopsova piramida

- V arhitekturi najdemo pogosto razmerje zlatega reza.
- Vendar pa tudi ne tako pogosto, kot bi želeli.
- V zvezi s Keopsovo piramido se omenja Keplerjev trikotnik.



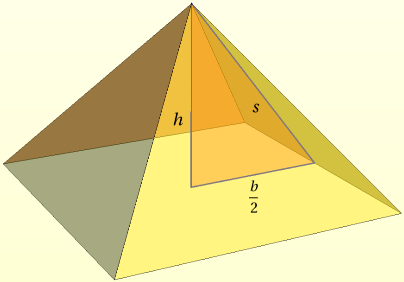
Keopsova piramida

- V arhitekturi najdemo pogosto razmerje zlatega reza.
- Vendar pa tudi ne tako pogosto, kot bi želeli.
- V zvezi s Keopsovo piramido se omenja Keplerjev trikotnik.



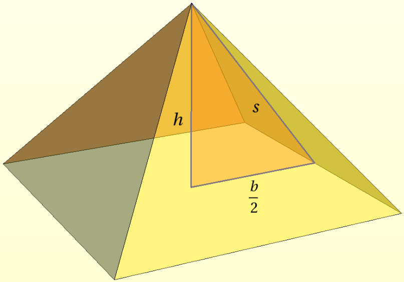
Keopsova piramida

- V arhitekturi najdemo pogosto razmerje zlatega reza.
- Vendar pa tudi ne tako pogosto, kot bi želeli.
- V zvezi s Keopsovo piramido se omenja Keplerjev trikotnik.



Keopsova piramida

- V arhitekturi najdemo pogosto razmerje zlatega reza.
- Vendar pa tudi ne tako pogosto, kot bi želeli.
- V zvezi s Keopsovo piramido se omenja Keplerjev trikotnik.



Iskanje skritih povezav

- V starem Egiptu zlati rez ni bil nikjer omenjen.
- Včasih se omenja, da je v dimezijah Keopsovi piramidi zakodirano tudi število π.

Zaradi neverjetno upornega iskanja skritih numeričnih povezav, ki jih najdemo na internetu in tudi v resnejši literaturi, se bomo za trenutek ustavili ob tem.

Iskanje skritih povezav

- V starem Egiptu zlati rez ni bil nikjer omenjen.
- Včasih se omenja, da je v dimezijah Keopsovi piramidi zakodirano tudi število π.

Zaradi neverjetno upornega iskanja skritih numeričnih povezav, ki jih najdemo na internetu in tudi v resnejši literaturi, se bomo za trenutek ustavili ob tem.

Iskanje skritih povezav

- V starem Egiptu zlati rez ni bil nikjer omenjen.
- Včasih se omenja, da je v dimezijah Keopsovi piramidi zakodirano tudi število π.

Zaradi neverjetno upornega iskanja skritih numeričnih povezav, ki jih najdemo na internetu in tudi v resnejši literaturi, se bomo za trenutek ustavili ob tem.

Iskanje skritih povezav

- V starem Egiptu zlati rez ni bil nikjer omenjen.
- Včasih se omenja, da je v dimezijah Keopsovi piramidi zakodirano tudi število π.

Zaradi neverjetno upornega iskanja skritih numeričnih povezav, ki jih najdemo na internetu in tudi v resnejši literaturi, se bomo za trenutek ustavili ob tem.

Keopsova piramida

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza 146.58 m.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, 230.35 m.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju $14 : 11$.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

Keopsova piramida

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza 146.58 m.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, 230.35 m.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju $14 : 11$.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

KEOPSOVA PIRAMIDA

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza 146.58 m.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, 230.35 m.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju $14 : 11$.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

Keopsova piramida

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza 146.58 m.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, 230.35 m.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju $14 : 11$.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

Keopsova piramida

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza 146.58 m.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, 230.35 m.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju 14 : 11.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

Keopsova piramida

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza 146.58 m.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, 230.35 m.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju $14 : 11$.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

Keopsova piramida

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza $146.58\,\mathrm{m}$.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, $230.35\,\mathrm{m}$.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju $14 : 11$.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

Keopsova piramida

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza 146.58 m.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, 230.35 m.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju $14 : 11$.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

Keopsova piramida

- Višina piramide je 280 kraljevih komolcev (kubitov), kar ustreza 146.58 m.
- Stranice osnovnega kvadrata merijo 440 kraljevih komolcev, 230.35 m.
- Keplerjev trikotnik tvorijo:

  višina stranske ploskve, $s = 356.09$ kraljevih komolcev je hipotenuza;

  polovica stranice osnovnega kvadrata $\frac{b}{2} = 220$ in

  višina piramide $h = 280$ sta kateti.
- Kateti sta v razmerju $14 : 11$.
- Razmerje, izračunano na 5 decimalnih mest natančno je enako 1.2727, medtem ko je $\sqrt{\varphi} \approx 1.2720$.

Dimenzije Keopsove piramide

- Presenetljivo? Morda niti ne.
- Hipotenuzi zlatega in Keopsovega trikotnika, zaokroženi na 5 decimalnih mest, sta $\varphi \approx 1.61803$ in $\left(\frac{14}{11}\right)^2 \approx 1.61983$. Ujemanje ni več tako dobro.
- Naklonski kot stranic Keopsove piramide glede na osnovno ploskev je $51.8428°$.
- Izkušnje so pokazale, da zaradi stabilnosti, kot ne sme presegati $54°$.
- Primer Lomljene piramide iz Dahshurja.
  V spodnjem delu piramide je naklonski kot $54°$, v zgornjem delu pa so, verjetno zaradi stabilnosti, kot zmanjšali na $43°$.
- Graditelji Keopsove piramide so želeli preseči vse do tedanje. Izbran je bil naklonski kot, ki je nekoliko manjši od največjega možnega naklona, ki so ga narekovele izkušnje.

Dimenzije Keopsove piramide

- Presenetljivo? Morda niti ne.
- Hipotenuzi zlatega in Keopsovega trikotnika, zaokroženi na 5 decimalnih mest, sta $\varphi \approx 1.61803$ in $\left(\frac{14}{11}\right)^2 \approx 1.61983$. Ujemanje ni več tako dobro.
- Naklonski kot stranic Keopsove piramide glede na osnovno ploskev je $51.8428°$.
- Izkušnje so pokazale, da zaradi stabilnosti, kot ne sme presegati $54°$.
- Primer Lomljene piramide iz Dahshurja. V spodnjem delu piramide je naklonski kot $54°$, v zgornjem delu pa so, verjetno zaradi stabilnosti, kot zmanjšali na $43°$.
- Graditelji Keopsove piramide so želeli preseči vse do tedanje. Izbran je bil naklonski kot, ki je nekoliko manjši od največjega možnega naklona, ki so ga narekovele izkušnje.

Dimenzije Keopsove piramide

- Presenetljivo? Morda niti ne.
- Hipotenuzi zlatega in Keopsovega trikotnika, zaokroženi na 5 decimalnih mest, sta $\varphi \approx 1.61803$ in $\left(\frac{14}{11}\right)^2 \approx 1.61983$. Ujemanje ni več tako dobro.
- Naklonski kot stranic Keopsove piramide glede na osnovno ploskev je $51.8428°$.
- Izkušnje so pokazale, da zaradi stabilnosti, kot ne sme presegati $54°$.
- Primer Lomljene piramide iz Dahshurja. V spodnjem delu piramide je naklonski kot $54°$, v zgornjem delu pa so, verjetno zaradi stabilnosti, kot zmanjšali na $43°$.
- Graditelji Keopsove piramide so želeli preseči vse do tedanje. Izbran je bil naklonski kot, ki je nekoliko manjši od največjega možnega naklona, ki so ga narekovele izkušnje.

Dimenzije Keopsove piramide

- Presenetljivo? Morda niti ne.
- Hipotenuzi zlatega in Keopsovega trikotnika, zaokroženi na 5 decimalnih mest, sta $\varphi \approx 1.61803$ in $\left(\frac{14}{11}\right)^2 \approx 1.61983$. Ujemanje ni več tako dobro.
- Naklonski kot stranic Keopsove piramide glede na osnovno ploskev je $51.8428°$.
- Izkušnje so pokazale, da zaradi stabilnosti, kot ne sme presegati $54°$.
- Primer Lomljene piramide iz Dahshurja. V spodnjem delu piramide je naklonski kot $54°$, v zgornjem delu pa so, verjetno zaradi stabilnosti, kot zmanjšali na $43°$.
- Graditelji Keopsove piramide so želeli preseči vse do tedanje. Izbran je bil naklonski kot, ki je nekoliko manjši od največjega možnega naklona, ki so ga narekovele izkušnje.

Dimenzije Keopsove piramide

- Presenetljivo? Morda niti ne.
- Hipotenuzi zlatega in Keopsovega trikotnika, zaokroženi na 5 decimalnih mest, sta $\varphi \approx 1.61803$ in $\left(\frac{14}{11}\right)^2 \approx 1.61983$. Ujemanje ni več tako dobro.
- Naklonski kot stranic Keopsove piramide glede na osnovno ploskev je $51.8428°$.
- Izkušnje so pokazale, da zaradi stabilnosti, kot ne sme presegati $54°$.
- Primer Lomljene piramide iz Dahshurja. V spodnjem delu piramide je naklonski kot $54°$, v zgornjem delu pa so, verjetno zaradi stabilnosti, kot zmanjšali na $43°$.
- Graditelji Keopsove piramide so želeli preseči vse do tedanje. Izbran je bil naklonski kot, ki je nekoliko manjši od največjega možnega naklona, ki so ga narekovele izkušnje.

Dimenzije Keopsove piramide

- Presenetljivo? Morda niti ne.
- Hipotenuzi zlatega in Keopsovega trikotnika, zaokroženi na 5 decimalnih mest, sta $\varphi \approx 1.61803$ in $\left(\frac{14}{11}\right)^2 \approx 1.61983$. Ujemanje ni več tako dobro.
- Naklonski kot stranic Keopsove piramide glede na osnovno ploskev je $51.8428°$.
- Izkušnje so pokazale, da zaradi stabilnosti, kot ne sme presegati $54°$.
- Primer Lomljene piramide iz Dahshurja.
  V spodnjem delu piramide je naklonski kot $54°$, v zgornjem delu pa so, verjetno zaradi stabilnosti, kot zmanjšali na $43°$.
- Graditelji Keopsove piramide so želeli preseči vse do tedanje. Izbran je bil naklonski kot, ki je nekoliko manjši od največjega možnega naklona, ki so ga narekovele izkušnje.

Dimenzije Keopsove piramide

- Presenetljivo? Morda niti ne.
- Hipotenuzi zlatega in Keopsovega trikotnika, zaokroženi na 5 decimalnih mest, sta $\varphi \approx 1.61803$ in $\left(\frac{14}{11}\right)^2 \approx 1.61983$. Ujemanje ni več tako dobro.
- Naklonski kot stranic Keopsove piramide glede na osnovno ploskev je $51.8428°$.
- Izkušnje so pokazale, da zaradi stabilnosti, kot ne sme presegati $54°$.
- Primer Lomljene piramide iz Dahshurja.
  V spodnjem delu piramide je naklonski kot $54°$, v zgornjem delu pa so, verjetno zaradi stabilnosti, kot zmanjšali na $43°$.
- Graditelji Keopsove piramide so želeli preseči vse do tedanje. Izbran je bil naklonski kot, ki je nekoliko manjši od največjega možnega naklona, ki so ga narekovele izkušnje.

Lomljena piramida iz Dahshurja

Sovpadanja

- Izbrali so kot okoli $52°$, natančneje $51.8428°$.
- Temu kotu v pravokotnem trikotniku pripadata kateti 11 enot in 14 enot.
- Izbirali so tako, da je razmerje katet čim bolj točno, izraženo s kvocientom dveh čim manjših celih števil.
- Verjetno niso vedeli, da je ulomek $14/11$ četrti verižni približek števila $\sqrt{\varphi}$.
- Lahko zaključimo:

Če so v tistem času želeli narediti največjo piramido dimenzij, ki se niso smele preveč oddaljiti od že preizkušenih, postane predpostavka o slučajnem sovpadanju sprejemljiva.

Sovpadanja

- Izbrali so kot okoli $52°$, natančneje $51.8428°$.
- Temu kotu v pravokotnem trikotniku pripadata kateti 11 enot in 14 enot.
- Izbirali so tako, da je razmerje katet čim bolj točno, izraženo s kvocientom dveh čim manjših celih števil.
- Verjetno niso vedeli, da je ulomek $14/11$ četrti verižni približek števila $\sqrt{\varphi}$.
- Lahko zaključimo:

Če so v tistem času želeli narediti največjo piramido dimenzij, ki se niso smele preveč oddaljiti od že preizkušenih, postane predpostavka o slučajnem sovpadanju sprejemljiva.

Sovpadanja

- Izbrali so kot okoli 52°, natančneje 51.8428°.
- Temu kotu v pravokotnem trikotniku pripadata kateti 11 enot in 14 enot.
- Izbirali so tako, da je razmerje katet čim bolj točno, izraženo s kvocientom dveh čim manjših celih števil.
- Verjetno niso vedeli, da je ulomek $14/11$ četrti verižni približek števila $\sqrt{\varphi}$.
- Lahko zaključimo:

Če so v tistem času želeli narediti največjo piramido dimenzij, ki se niso smele preveč oddaljiti od že preizkušenih, postane predpostavka o slučajnem sovpadanju sprejemljiva.

Sovpadanja

- Izbrali so kot okoli $52°$, natančneje $51.8428°$.
- Temu kotu v pravokotnem trikotniku pripadata kateti 11 enot in 14 enot.
- Izbirali so tako, da je razmerje katet čim bolj točno, izraženo s kvocientom dveh čim manjših celih števil.
- Verjetno niso vedeli, da je ulomek $14/11$ četrti verižni približek števila $\sqrt{\varphi}$.
- Lahko zaključimo:

Če so v tistem času želeli narediti največjo piramido dimenzij, ki se niso smele preveč oddaljiti od že preizkušenih, postane predpostavka o slučajnem sovpadanju sprejemljiva.

Sovpadanja

- Izbrali so kot okoli $52°$, natančneje $51.8428°$.
- Temu kotu v pravokotnem trikotniku pripadata kateti 11 enot in 14 enot.
- Izbirali so tako, da je razmerje katet čim bolj točno, izraženo s kvocientom dveh čim manjših celih števil.
- Verjetno niso vedeli, da je ulomek $14/11$ četrti verižni približek števila $\sqrt{\varphi}$.
- Lahko zaključimo:

  Če so v tistem času želeli narediti največjo piramido dimenzij, ki se niso smele preveč oddaljiti od že preizkušenih, postane predpostavka o slučajnem sovpadanju sprejemljiva.

Sovpadanja

- Izbrali so kot okoli 52°, natančneje 51.8428°.
- Temu kotu v pravokotnem trikotniku pripadata kateti 11 enot in 14 enot.
- Izbirali so tako, da je razmerje katet čim bolj točno, izraženo s kvocientom dveh čim manjših celih števil.
- Verjetno niso vedeli, da je ulomek $14/11$ četrti verižni približek števila $\sqrt{\varphi}$.
- Lahko zaključimo:

Če so v tistem času želeli narediti največjo piramido dimenzij, ki se niso smele preveč oddaljiti od že preizkušenih, postane predpostavka o slučajnem sovpadanju sprejemljiva.

Sovpadanja, nadaljevanje

- $\pi/4 = 0.7853981634$
- $\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}} = 0.7861513778$
- Približek $\sqrt{\varphi} \approx \frac{14}{11}$ nam da $\pi \approx 4\dfrac{11}{14} = \dfrac{22}{7}$
- Zlati rez, Divine Proportion?
- $\sin(666°) = \cos(6 \cdot 6 \cdot 6°) = -\frac{\varphi}{2}$

Sovpadanja, nadaljevanje

- $\pi/4 = 0.7853981634$
- $\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}} = 0.7861513778$
- Približek $\sqrt{\varphi} \approx \frac{14}{11}$ nam da $\pi \approx 4\dfrac{11}{14} = \dfrac{22}{7}$
- Zlati rez, Divine Proportion?
- $\sin(666^\circ) = \cos(6 \cdot 6 \cdot 6^\circ) = -\frac{\varphi}{2}$

Sovpadanja, nadaljevanje

- $\pi/4 = 0.7853981634$
- $\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}} = 0.7861513778$
- Približek $\sqrt{\varphi} \approx \frac{14}{11}$ nam da $\pi \approx 4\dfrac{11}{14} = \dfrac{22}{7}$
- Zlati rez, Divine Proportion?
- $\sin(666°) = \cos(6 \cdot 6 \cdot 6°) = -\frac{\varphi}{2}$

Sovpadanja, nadaljevanje

- $\pi/4 = 0.7853981634$
- $\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}} = 0.7861513778$
- Približek $\sqrt{\varphi} \approx \frac{14}{11}$ nam da $\pi \approx 4\dfrac{11}{14} = \dfrac{22}{7}$
- Zlati rez, Divine Proportion?
- $\sin(666^\circ) = \cos(6 \cdot 6 \cdot 6^\circ) = -\frac{\varphi}{2}$

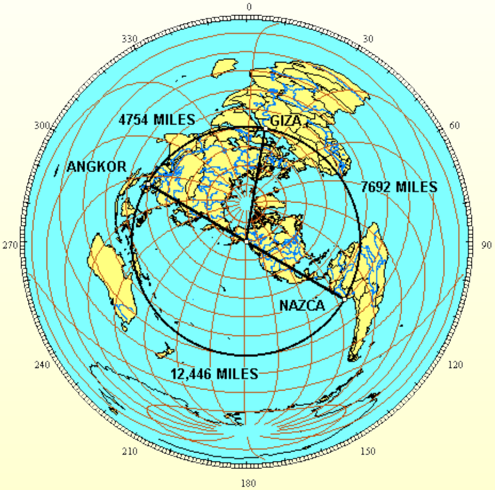
Sovpadanja, nadaljevanje

- $\pi/4 = 0.7853981634$
- $\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}} = 0.7861513778$
- Približek $\sqrt{\varphi} \approx \frac{14}{11}$ nam da $\pi \approx 4\dfrac{11}{14} = \dfrac{22}{7}$
- Zlati rez, Divine Proportion?
- $\sin(666^\circ) = \cos(6 \cdot 6 \cdot 6^\circ) = -\frac{\varphi}{2}$

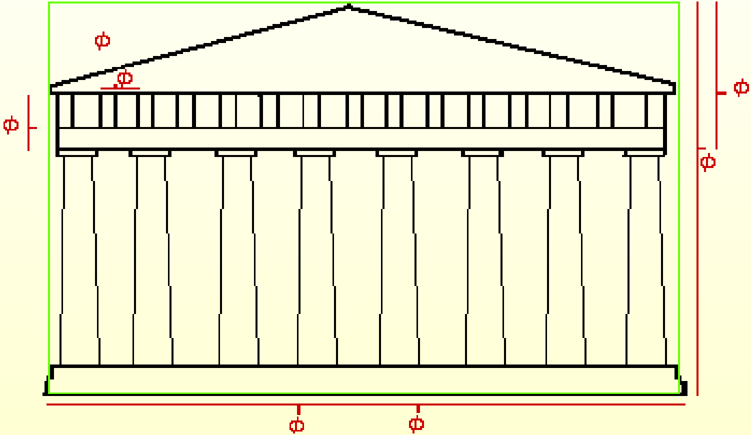
Sovpadanja, nadaljevanje

- $\pi/4 = 0.7853981634$
- $\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}} = 0.7861513778$
- Približek $\sqrt{\varphi} \approx \frac{14}{11}$ nam da $\pi \approx 4\dfrac{11}{14} = \dfrac{22}{7}$
- Zlati rez, Divine Proportion?
- $\sin(666^\circ) = \cos(6 \cdot 6 \cdot 6^\circ) = -\frac{\varphi}{2}$

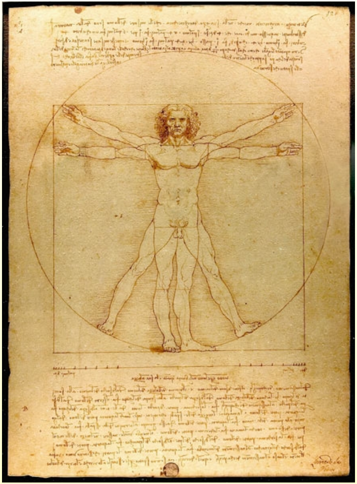
To je pa že malo preveč.



Razmerje, ki ga želimo.



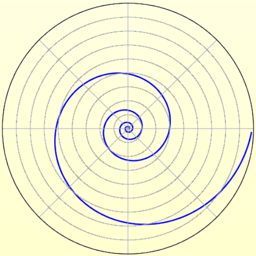
Lepa zgodba škoda, da ni nič na tem.

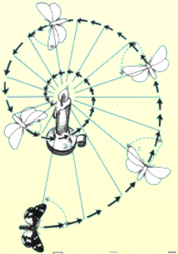


Če se večina strinja, še ni rečeno da je res.

Logaritmična spirala

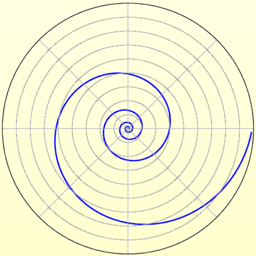
- Logaritmična spirala je krivulja, pri kateri je kot med tangento in vektorjem položaja točke krivulje, konstanten.
- Predpostavlja se, da je taka pot insekta v bližini svetlobnega vira. Navigacijski sistem insekta skrbi, da le-ta vidi vir svetlobe vedno pod enakim kotom.
- Če bi ta vir bil v "neskončnosti", na primer luna, bi insekt letel v ravni črti.
- Enačba logaritmične spirale v polarnih koordinatah: $r = ae^{b\theta}$.

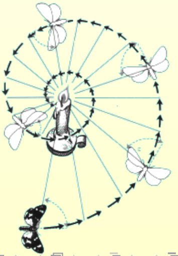




Logaritmična spirala

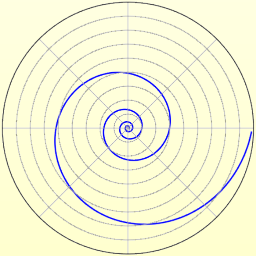
- Logaritmična spirala je krivulja, pri kateri je kot med tangento in vektorjem položaja točke krivulje, konstanten.
- Predpostavlja se, da je taka pot insekta v bližini svetlobnega vira. Navigacijski sistem insekta skrbi, da le-ta vidi vir svetlobe vedno pod enakim kotom.
- Če bi ta vir bil v "neskončnosti", na primer luna, bi insekt letel v ravni črti.
- Enačba logaritmične spirale v polarnih koordinatah: $r = ae^{b\theta}$.

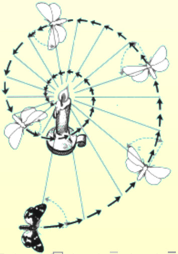




Logaritmična spirala

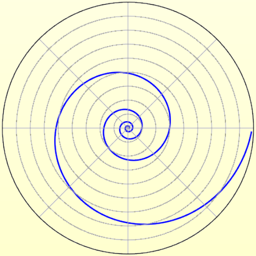
- Logaritmična spirala je krivulja, pri kateri je kot med tangento in vektorjem položaja točke krivulje, konstanten.
- Predpostavlja se, da je taka pot insekta v bližini svetlobnega vira. Navigacijski sistem insekta skrbi, da le-ta vidi vir svetlobe vedno pod enakim kotom.
- Če bi ta vir bil v "neskončnosti", na primer luna, bi insekt letel v ravni črti.
- Enačba logaritmične spirale v polarnih koordinatah: $r = ae^{b\theta}$.

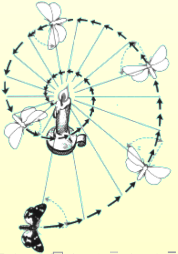




Logaritmična spirala

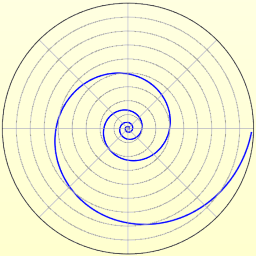
- Logaritmična spirala je krivulja, pri kateri je kot med tangento in vektorjem položaja točke krivulje, konstanten.
- Predpostavlja se, da je taka pot insekta v bližini svetlobnega vira. Navigacijski sistem insekta skrbi, da le-ta vidi vir svetlobe vedno pod enakim kotom.
- Če bi ta vir bil v "neskončnosti", na primer luna, bi insekt letel v ravni črti.
- Enačba logaritmične spirale v polarnih koordinatah: $r = ae^{b\theta}$.

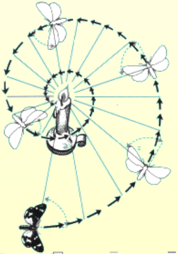




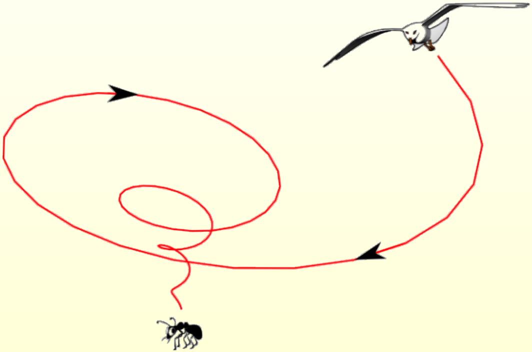
Logaritmična spirala

- Logaritmična spirala je krivulja, pri kateri je kot med tangento in vektorjem položaja točke krivulje, konstanten.
- Predpostavlja se, da je taka pot insekta v bližini svetlobnega vira. Navigacijski sistem insekta skrbi, da le-ta vidi vir svetlobe vedno pod enakim kotom.
- Če bi ta vir bil v "neskončnosti", na primer luna, bi insekt letel v ravni črti.
- Enačba logaritmične spirale v polarnih koordinatah: $r = ae^{b\theta}$.





Sokolov let



Zlata spirala

- Zlata spirala je logaritmična spirala, taka da se dolžina vektorja položaja točke na spirali pomnoži z φ, ko se polarni kot poveča za $90°$.

$$r = \varphi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

Zlata spirala

- Zlata spirala je logaritmična spirala, taka da se dolžina vektorja položaja točke na spirali pomnoži z φ, ko se polarni kot poveča za $90°$.

$$r = \varphi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

Zlata spirala

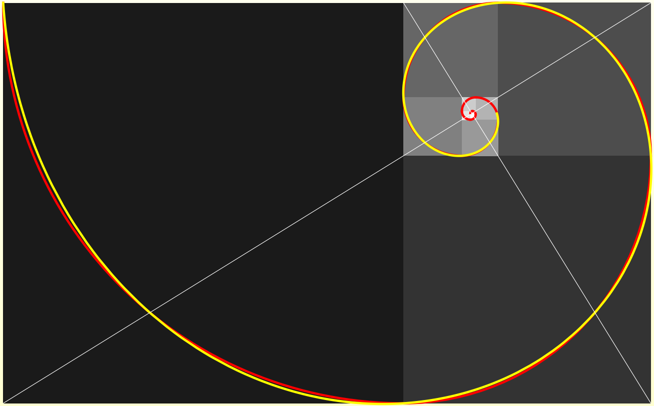
- Zlata spirala je logaritmična spirala, taka da se dolžina vektorja položaja točke na spirali pomnoži z φ, ko se polarni kot poveča za $90°$.

$$r = \varphi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

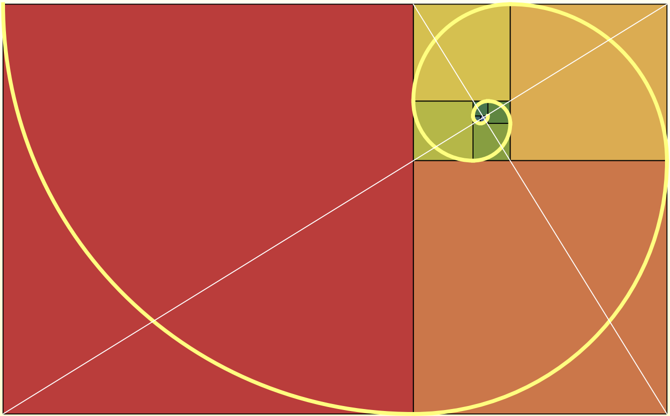
Samopodobnost

Samopodobnost logaritemske spirale

Eadem mutata resurgo. Raste, vendar ostaja vedno enaka.



Fibonaccijeva spirala



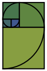
Konstrukcija

Konstrukcija

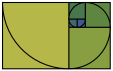
Konstrukcija

Konstrukcija

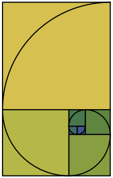
Konstrukcija



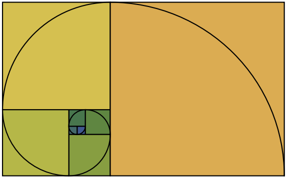
Konstrukcija



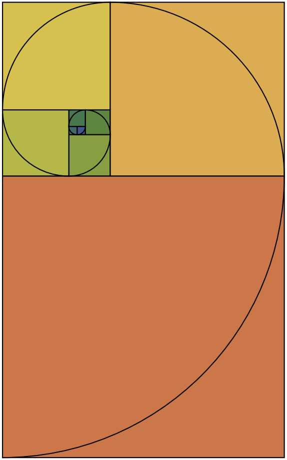
Konstrukcija



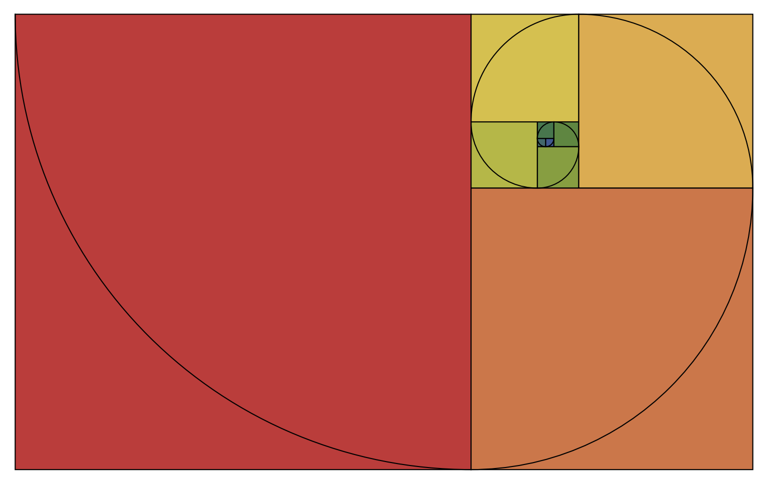
Konstrukcija



Konstrukcija



Konstrukcija



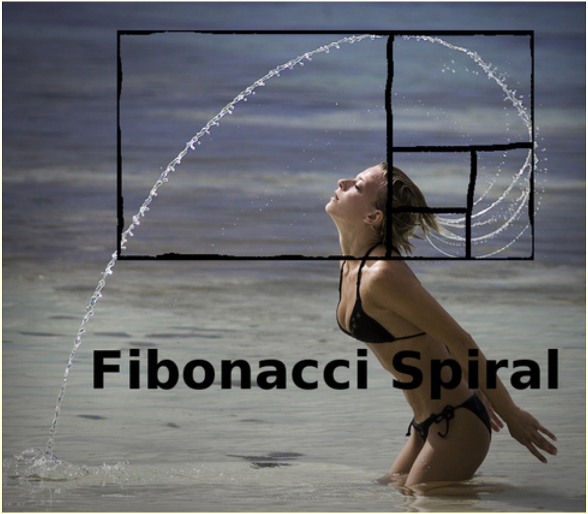
Spirale v naravi

Slika : Levo hišica nautilusa, desno je spiralna galaksija M101.

Spirale v naravi

Približke logaritmične spirale najdemo v naravi (na primer, v nekaterih spiralnih galaksijah in pri razporeditvi semen ali listov v filotaksi). Zlata spirala je le poseben primer logaritmične. Včasih naletimo na trditve, da so spirale v naravi zlate spirale. Vendar to v splošnem ni res. V spiralnih galaksijah najdemo širši razred spiral, ki v splošnem niso niti logaritmične. Hišice nautilusa imajo obliko logaritmične spirale, vendar pa so njihovi koti lahko zelo različni. Logaritmična spirala omogoča organizmom, da rastejo, ne da spreminjali obliko.

Zanimivost iz interneta



Sončnica

Sončnica, girasol, girasole, gira-sol, turnesol, sunflower, sonneblume, suncokret, napraforgó,... je dobila takšno ime, ker naj bi se glava cveta obračala k soncu, kar ni popolnoma res.

Model

Glava sončničnega socveta raste od znotraj navzven.
Model vzorca porazdelitve semen je naslednji:

- V sredini nastajajo novi brstiči socvetja.
- Kot med dvema zaporednima brstičema je enak $\theta = 360^\circ/\varphi^2 \approx 137.5^\circ$, kjer je φ razmerje zlatega reza.
- Razdalja n-tega cveta (semena) od središča je premosorazmerna n.
- Položaj semena znotraj glave v polarnih koordinatah:

$$r = cn, \quad \alpha = n\theta, \quad n \in \mathbb{N},$$

Model

Glava sončničnega socveta raste od znotraj navzven.
Model vzorca porazdelitve semen je naslednji:

- V sredini nastajajo novi brstiči socvetja.
- Kot med dvema zaporednima brstičema je enak $\theta = 360°/\varphi^2 \approx 137.5°$, kjer je φ razmerje zlatega reza.
- Razdalja n-tega cveta (semena) od središča je premosorazmerna n.
- Položaj semena znotraj glave v polarnih koordinatah:

$$r = cn, \quad \alpha = n\theta, \quad n \in \mathbb{N},$$

Model

Glava sončničnega socveta raste od znotraj navzven.
Model vzorca porazdelitve semen je naslednji:

- V sredini nastajajo novi brstiči socvetja.
- Kot med dvema zaporednima brstičema je enak $\theta = 360°/\varphi^2 \approx 137.5°$, kjer je φ razmerje zlatega reza.
- Razdalja n-tega cveta (semena) od središča je premosorazmerna n.
- Položaj semena znotraj glave v polarnih koordinatah:

$$r = cn, \quad \alpha = n\theta, \quad n \in \mathbb{N},$$

Model

Glava sončničnega socveta raste od znotraj navzven.
Model vzorca porazdelitve semen je naslednji:

- V sredini nastajajo novi brstiči socvetja.
- Kot med dvema zaporednima brstičema je enak $\theta = 360^\circ/\varphi^2 \approx 137.5^\circ$, kjer je φ razmerje zlatega reza.
- Razdalja n-tega cveta (semena) od središča je premosorazmerna $\sqrt{n}$.
- Položaj semena znotraj glave v polarnih koordinatah:

$$r = c\sqrt{n}, \quad \alpha = n\theta, \quad n \in \mathbb{N},$$

Model

Glava sončničnega socveta raste od znotraj navzven.
Model vzorca porazdelitve semen je naslednji:

- V sredini nastajajo novi brstiči socvetja.
- Kot med dvema zaporednima brstičema je enak $\theta = 360°/\varphi^2 \approx 137.5°$, kjer je φ razmerje zlatega reza.
- Razdalja n-tega cveta (semena) od središča je premosorazmerna n.
- Položaj semena znotraj glave v polarnih koordinatah:

$$r = cn, \quad \alpha = n\theta, \quad n \in \mathbb{N},$$

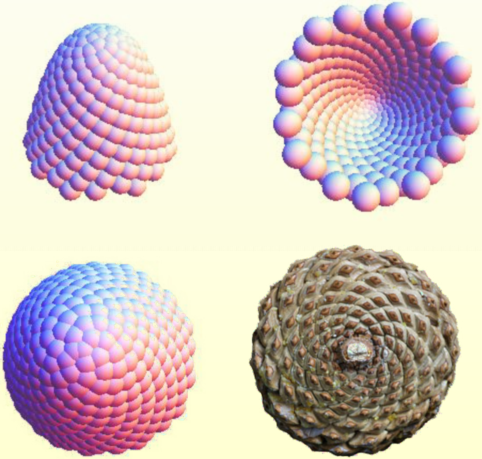
Model

Glava sončničnega socveta raste od znotraj navzven.
Model vzorca porazdelitve semen je naslednji:

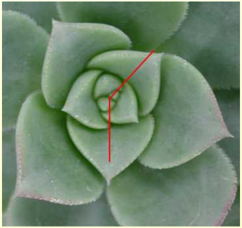
- V sredini nastajajo novi brstiči socvetja.
- Kot med dvema zaporednima brstičema je enak $\theta = 360°/\varphi^2 \approx 137.5°$, kjer je φ razmerje zlatega reza.
- Razdalja n-tega cveta (semena) od središča je premosorazmerna n.
- Položaj semena znotraj glave v polarnih koordinatah:

$$r = cn, \quad \alpha = n\theta, \quad n \in \mathbb{N},$$

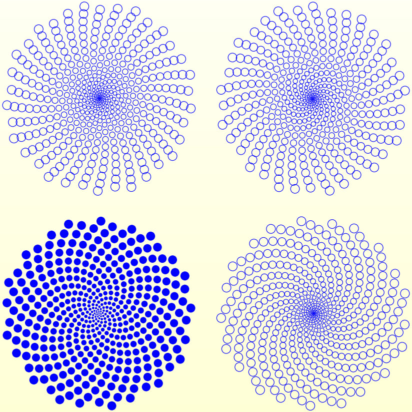
Storž



Spirale in še več spiral



Natančnost



Izbrani koti so: $\theta - 0.2^\circ; \theta - 0.1^\circ; \theta; \theta + 0.1^\circ$.

Numerologija

1. Oštevilčimo semena glede na njihov nastanek tako, da zadnji nosi številko 1!
2. Na naslednji sliki je prikazan kolobar 7 v katerem se nahajajo semena, ki so oštevilčena od $F(6)^2 + 1$ do $F(7)^2$.
3. Iz enačb (4) in (5) sledijo naslednje zveze med števili semen in členi Fibonaccijevega zaporedja: $N = F(7)^2 - F(6)^2$, $N = F(8)F(5)$ in $N = F(7)F(6) + 1$.

Numerologija

1. Oštevilčimo semena glede na njihov nastanek tako, da zadnji nosi številko 1!
2. Na naslednji sliki je prikazan kolobar 7 v katerem se nahajajo semena, ki so oštevilčena od $F(6)^2 + 1$ do $F(7)^2$.
3. Iz enačb (4) in (5) sledijo naslednje zveze med števili semen in členi Fibonaccijevega zaporedja:
   $N = F(7)^2 - F(6)^2$, $N = F(8)F(5)$ in $N = F(7)F(6) + 1$.

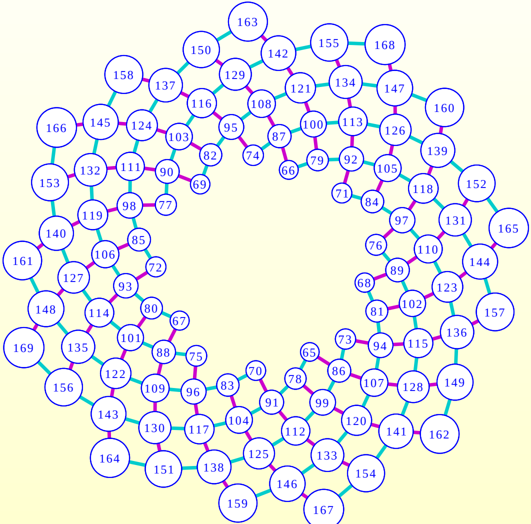
Numerologija

1. Oštevilčimo semena glede na njihov nastanek tako, da zadnji nosi številko 1!
2. Na naslednji sliki je prikazan kolobar 7 v katerem se nahajajo semena, ki so oštevilčena od $F(6)^2 + 1$ do $F(7)^2$.
3. Iz enačb (4) in (5) sledijo naslednje zveze med števili semen in členi Fibonaccijevega zaporedja: $N = F(7)^2 - F(6)^2$, $N = F(8)F(5)$ in $N = F(7)F(6) + 1$.

Numerologija

1. Oštevilčimo semena glede na njihov nastanek tako, da zadnji nosi številko 1!
2. Na naslednji sliki je prikazan kolobar 7 v katerem se nahajajo semena, ki so oštevilčena od $F(6)^2+1$ do $F(7)^2$.
3. Iz enačb (4) in (5) sledijo naslednje zveze med števili semen in členi Fibonaccijevega zaporedja:
   $N=F(7)^2-F(6)^2$, $N=F(8)F(5)$ in $N=F(7)F(6)+1$.

Kolobar 7



163
150 142 155 168
158 129
137 121 134 147
116 108 160
166 145 124 103 95 87 100 113 126
82 74 139
132 111 90 66 79 92 105
153 69 152
77 98 71 84 118
119 97 131 165
140 85 76 110
161 106 72 144
127 89
93 68 123
148 114 80 81 102 157
67
101 136
169 135 88 75 65 73 94 115
122 70 78 86
109 96 83 107 128 149
156 91 99
143 130 117 104 120 141 162
112
164 151 138 125 133 154
146
159 167

Spirale

1. Število semen v kolobarju 7 je $N = F(7)^2 - F(6)^2 = 105$. Semena so urejena v dve družini spiral.
2. Številčnejša družina ima $F(8) = 21$ spiral in vsaka od njih ima $F(5) = 5$ semen.
3. Manjštevilčna družina ima $F(7) = 13$ spiral in vsaka od njih ima $F(6) = 8$ semen.
4. Razlika med indeksi dveh zaporednih semen v spirali je enaka številu semen v tej spirali.
5. Število spiral v vsaki od obeh družin je enako sosednjima členoma v Fibonaccijevem zaporedju.

SPIRALE

1. Število semen v kolobarju 7 je $N = F(7)^2 - F(6)^2 = 105$. Semena so urejena v dve družini spiral.
2. Številčnejša družina ima $F(8) = 21$ spiral in vsaka od njih ima $F(5) = 5$ semen.
3. Manjštevilčna družina ima $F(7) = 13$ spiral in vsaka od njih ima $F(6) = 8$ semen.
4. Razlika med indeksi dveh zaporednih semen v spirali je enaka številu semen v tej spirali.
5. Število spiral v vsaki od obeh družin je enako sosednjima členoma v Fibonaccijevem zaporedju.

Spirale

1. Število semen v kolobarju 7 je $N = F(7)^2 - F(6)^2 = 105$. Semena so urejena v dve družini spiral.
2. Številčnejša družina ima $F(8) = 21$ spiral in vsaka od njih ima $F(5) = 5$ semen.
3. Manjštevilčna družina ima $F(7) = 13$ spiral in vsaka od njih ima $F(6) = 8$ semen.
4. Razlika med indeksi dveh zaporednih semen v spirali je enaka številu semen v tej spirali.
5. Število spiral v vsaki od obeh družin je enako sosednjima členoma v Fibonaccijevem zaporedju.

Spirale

1. Število semen v kolobarju 7 je $N = F(7)^2 - F(6)^2 = 105$. Semena so urejena v dve družini spiral.
2. Številčnejša družina ima $F(8) = 21$ spiral in vsaka od njih ima $F(5) = 5$ semen.
3. Manjštevilčna družina ima $F(7) = 13$ spiral in vsaka od njih ima $F(6) = 8$ semen.
4. Razlika med indeksi dveh zaporednih semen v spirali je enaka številu semen v tej spirali.
5. Število spiral v vsaki od obeh družin je enako sosednjima členoma v Fibonaccijevem zaporedju.

Spirale

1. Število semen v kolobarju 7 je $N = F(7)^2 - F(6)^2 = 105$. Semena so urejena v dve družini spiral.
2. Številčnejša družina ima $F(8) = 21$ spiral in vsaka od njih ima $F(5) = 5$ semen.
3. Manjštevilčna družina ima $F(7) = 13$ spiral in vsaka od njih ima $F(6) = 8$ semen.
4. Razlika med indeksi dveh zaporednih semen v spirali je enaka številu semen v tej spirali.
5. Število spiral v vsaki od obeh družin je enako sosednjima členoma v Fibonaccijevem zaporedju.

Spirale

1. Število semen v kolobarju 7 je $N = F(7)^2 - F(6)^2 = 105$. Semena so urejena v dve družini spiral.
2. Številčnejša družina ima $F(8) = 21$ spiral in vsaka od njih ima $F(5) = 5$ semen.
3. Manjštevilčna družina ima $F(7) = 13$ spiral in vsaka od njih ima $F(6) = 8$ semen.
4. Razlika med indeksi dveh zaporednih semen v spirali je enaka številu semen v tej spirali.
5. Število spiral v vsaki od obeh družin je enako sosednjima členoma v Fibonaccijevem zaporedju.

Razcepi spiral

- Število spiral se povečuje, od središča proti robu.
- Kolobar z indeksom n je tisti, ki ima $N(n) = F(n)^2 - F(n-1)^2$ semen. Družini spiral vsebujeta $F(n+1)$ in $F(n)$ posameznih spiral.
- Spirale številčnejše družine se iz notranjega kolobarja $n-1$ nadaljuje kot družina z manjšim številom spiral v kolobarju n.
- Družina z manjšim številom spiral v kolobarju $n-1$, tista, ki vsebuje $F(n-1)$ spiral, se na meji med kolobarjema cepi, in se nadaljuje kot družina z večjim številom spiral v kolobarju n, in vsebuje $F(n+1)$ spiral.

Razcepi spiral

- Število spiral se povečuje, od središča proti robu.
- Kolobar z indeksom n je tisti, ki ima $N(n) = F(n)^2 - F(n-1)^2$ semen. Družini spiral vsebujeta $F(n+1)$ in $F(n)$ posameznih spiral.
- Spirale številčnejše družine se iz notranjega kolobarja $n-1$ nadaljuje kot družina z manjšim številom spiral v kolobarju n.
- Družina z manjšim številom spiral v kolobarju $n-1$, tista, ki vsebuje $F(n-1)$ spiral, se na meji med kolobarjema cepi, in se nadaljuje kot družina z večjim številom spiral v kolobarju n, in vsebuje $F(n+1)$ spiral.

Razcepi spiral

- Število spiral se povečuje, od središča proti robu.
- Kolobar z indeksom n je tisti, ki ima $N(n) = F(n)^2 - F(n-1)^2$ semen. Družini spiral vsebujeta $F(n+1)$ in $F(n)$ posameznih spiral.
- Spirale številčnejše družine se iz notranjega kolobarja $n-1$ nadaljuje kot družina z manjšim številom spiral v kolobarju n.
- Družina z manjšim številom spiral v kolobarju $n-1$, tista, ki vsebuje $F(n-1)$ spiral, se na meji med kolobarjema cepi, in se nadaljuje kot družina z večjim številom spiral v kolobarju n, in vsebuje $F(n+1)$ spiral.

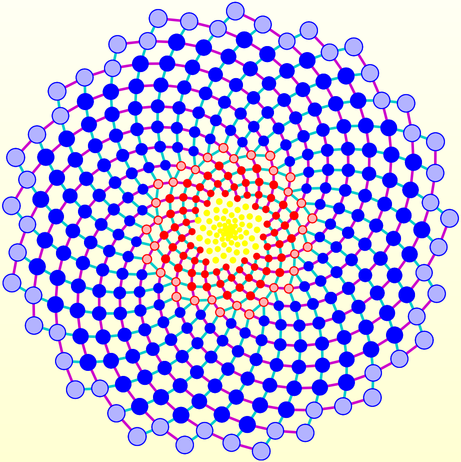
Razcepi spiral

- Število spiral se povečuje, od središča proti robu.
- Kolobar z indeksom n je tisti, ki ima $N(n) = F(n)^2 - F(n-1)^2$ semen. Družini spiral vsebujeta $F(n+1)$ in $F(n)$ posameznih spiral.
- Spirale številčnejše družine se iz notranjega kolobarja $n-1$ nadaljuje kot družina z manjšim številom spiral v kolobarju n.
- Družina z manjšim številom spiral v kolobarju $n-1$, tista, ki vsebuje $F(n-1)$ spiral, se na meji med kolobarjema cepi, in se nadaljuje kot družina z večjim številom spiral v kolobarju n, in vsebuje $F(n+1)$ spiral.

Razcepi spiral

- Število spiral se povečuje, od središča proti robu.
- Kolobar z indeksom n je tisti, ki ima $N(n) = F(n)^2 - F(n-1)^2$ semen. Družini spiral vsebujeta $F(n+1)$ in $F(n)$ posameznih spiral.
- Spirale številčnejše družine se iz notranjega kolobarja $n-1$ nadaljuje kot družina z manjšim številom spiral v kolobarju n.
- Družina z manjšim številom spiral v kolobarju $n-1$, tista, ki vsebuje $F(n-1)$ spiral, se na meji med kolobarjema cepi, in se nadaljuje kot družina z večjim številom spiral v kolobarju n, in vsebuje $F(n+1)$ spiral.

Razcepi



Fibonaccijeva beseda

- Razcepi so drugega in tretjega reda.
- Po obodu si sledijo po vzorcu znakov v Fibonaccijevi besedi.
- $2 \to 3, \quad 3 \to \{3,2\} \longrightarrow 2 \to \{3,2\}$
- $3 \to \{3,2\}, \quad 3 \to \{3,2,3\} \longrightarrow 3 \to \{3,2,3\}$

Fibonaccijeva beseda

- Razcepi so drugega in tretjega reda.
- Po obodu si sledijo po vzorcu znakov v Fibonaccijevi besedi.
- $2 \to 3, \quad 3 \to \{3,2\} \longrightarrow 2 \to \{3,2\}$
- $3 \to \{3,2\}, \quad 3 \to \{3,2,3\} \longrightarrow 3 \to \{3,2,3\}$

Fibonaccijeva beseda

- Razcepi so drugega in tretjega reda.
- Po obodu si sledijo po vzorcu znakov v Fibonaccijevi besedi.
- $2 \to 3, \quad 3 \to \{3,2\} \longrightarrow 2 \to \{3,2\}$
- $3 \to \{3,2\}, \quad 3 \to \{3,2,3\} \longrightarrow 3 \to \{3,2,3\}$

Fibonaccijeva beseda

- Razcepi so drugega in tretjega reda.
- Po obodu si sledijo po vzorcu znakov v Fibonaccijevi besedi.
- $2 \to 3, \quad 3 \to \{3, 2\} \longrightarrow 2 \to \{3, 2\}$
- $3 \to \{3, 2\}, \quad 3 \to \{3, 2, 3\} \longrightarrow 3 \to \{3, 2, 3\}$

Fibonaccijeva beseda

- Razcepi so drugega in tretjega reda.
- Po obodu si sledijo po vzorcu znakov v Fibonaccijevi besedi.
- $2 \to 3, \quad 3 \to \{3,2\} \longrightarrow 2 \to \{3,2\}$
- $3 \to \{3,2\}, \quad 3 \to \{3,2,3\} \longrightarrow 3 \to \{3,2,3\}$

Filotaksa v 20 stoletju

- Leta 1907 je Van Iterson naredil model porazdelitve listnih nastavkov na valjastem steblu.
- Njegovo delo je leta 1973 na novo odkril Erickson.
- V nadaljevanju so fiziki, med njimi Levitov leta 1991 in Dauady in Couder leta 1992, naredili še en pomemben korak v razumevanju filotakse.
- Na mesto geometričnih načel porazdelitve listnih nastavkov so vpeljali načelo najmanjše energije.

Filotaksa v 20 stoletju

- Leta 1907 je Van Iterson naredil model porazdelitve listnih nastavkov na valjastem steblu.
- Njegovo delo je leta 1973 na novo odkril Erickson.
- V nadaljevanju so fiziki, med njimi Levitov leta 1991 in Dauady in Couder leta 1992, naredili še en pomemben korak v razumevanju filotakse.
- Na mesto geometričnih načel porazdelitve listnih nastavkov so vpeljali načelo najmanjše energije.

Filotaksa v 20 stoletju

- Leta 1907 je Van Iterson naredil model porazdelitve listnih nastavkov na valjastem steblu.
- Njegovo delo je leta 1973 na novo odkril Erickson.
- V nadaljevanju so fiziki, med njimi Levitov leta 1991 in Dauady in Couder leta 1992, naredili še en pomemben korak v razumevanju filotakse.
- Na mesto geometričnih načel porazdelitve listnih nastavkov so vpeljali načelo najmanjše energije.

Filotaksa v 20 stoletju

- Leta 1907 je Van Iterson naredil model porazdelitve listnih nastavkov na valjastem steblu.
- Njegovo delo je leta 1973 na novo odkril Erickson.
- V nadaljevanju so fiziki, med njimi Levitov leta 1991 in Dauady in Couder leta 1992, naredili še en pomemben korak v razumevanju filotakse.
- Na mesto geometričnih načel porazdelitve listnih nastavkov so vpeljali načelo najmanjše energije.

Filotaksa v 20 stoletju

- Leta 1907 je Van Iterson naredil model porazdelitve listnih nastavkov na valjastem steblu.
- Njegovo delo je leta 1973 na novo odkril Erickson.
- V nadaljevanju so fiziki, med njimi Levitov leta 1991 in Dauady in Couder leta 1992, naredili še en pomemben korak v razumevanju filotakse.
- Na mesto geometričnih načel porazdelitve listnih nastavkov so vpeljali načelo najmanjše energije.

Dinamični sistem

http://www.math.smith.edu/phyllo/Applets/DynModel/DynModel550.html

1. Točke nastajajo v središču, ker je največ prostora.
2. Ko nastane nova točka, se le-ta začne gibati radialno navzven.
3. Radialna hitrost se z oddaljevanjem od središča zmanjšuje.
4. Kot med trajektorijama dveh zaporednih točk se približuje zlati vrednosti $360/\varphi^2 \approx 137.5°$.

Dinamični sistem

http://www.math.smith.edu/phyllo/Applets/DynModel/DynModel550.html

1. Točke nastajajo v središču, ker je največ prostora.
2. Ko nastane nova točka, se le-ta začne gibati radialno navzven.
3. Radialna hitrost se z oddaljevanjem od središča zmanjšuje.
4. Kot med trajektorijama dveh zaporednih točk se približuje zlati vrednosti $360/\varphi^2 \approx 137.5°$.

Dinamični sistem

http://www.math.smith.edu/phyllo/Applets/DynModel/DynModel550.html

1. Točke nastajajo v središču, ker je največ prostora.
2. Ko nastane nova točka, se le-ta začne gibati radialno navzven.
3. Radialna hitrost se z oddaljevanjem od središča zmanjšuje.
4. Kot med trajektorijama dveh zaporednih točk se približuje zlati vrednosti $360/\varphi^2 \approx 137.5^\circ$.

Dinamični sistem

http://www.math.smith.edu/phyllo/Applets/DynModel/DynModel550.html

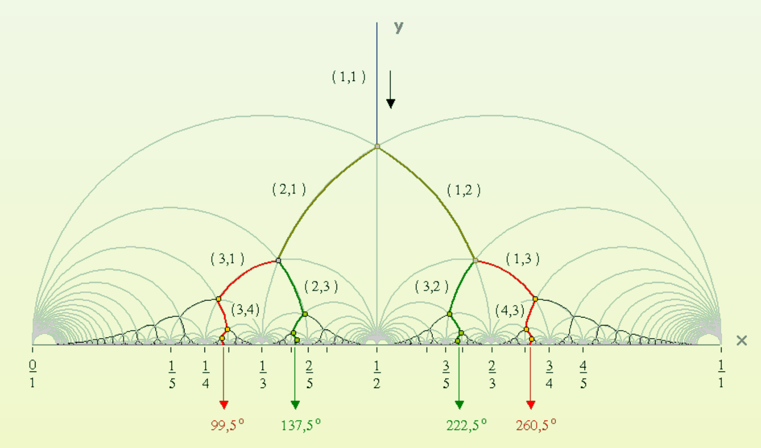
1. Točke nastajajo v središču, ker je največ prostora.
2. Ko nastane nova točka, se le-ta začne gibati radialno navzven.
3. Radialna hitrost se z oddaljevanjem od središča zmanjšuje.
4. Kot med trajektorijama dveh zaporednih točk se približuje zlati vrednosti $360/\varphi^2 \approx 137.5°$.

Dinamični sistem

http://www.math.smith.edu/phyllo/Applets/DynModel/DynModel550.html

1. Točke nastajajo v središču, ker je največ prostora.
2. Ko nastane nova točka, se le-ta začne gibati radialno navzven.
3. Radialna hitrost se z oddaljevanjem od središča zmanjšuje.
4. Kot med trajektorijama dveh zaporednih točk se približuje zlati vrednosti $360/\varphi^2 \approx 137.5^\circ$.

Diagram Van Itersona



Bibliografija

Jurčič Zlobec B., Rubiano Ortegón G. N.
Filotaksa
Publicar o perecer
Ljubljana, Bogotá, Volume 2011, pages all.

Rubiano Ortegón G. N.
Iteración y fractales (con Mathematica)
Colección **OBRA** SELECTA
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009.